А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2009

УДК 373:512
ББК 22.151я721
М52

Видано за рахунок державних коштів
Продаж заборонено

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(Наказ від 02.02.2009 р. № 56)

Відповідальні за підготовку до видання:

Головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України *Н. С. Прокопенко*
Методист вищої категорії Інституту інноваційних технологій і змісту освіти *О. О. Литвиненко*

Експерти, які здійснювали експертизу
та рекомендували підручник до видання:

О. В. Горелова, учитель-методист загальноосвітньої школи № 10 м. Ізмаїла Одеської області
К. М. Петечук, методист Закарпатського інституту післядипломної педагогічної освіти
О. М. Сінюкова, викладач кафедри геометрії Південноукраїнського державного педагогічного університету ім. К. Д. Ушинського м. Одеси, кандидат фізико-математичних наук, доцент
В. В. Шарко, завідувач відділу топології Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор
Т. М. Хмара, провідний науковий співробітник лабораторії математичної і фізичної освіти Інституту педагогіки АПН України, кандидат педагогічних наук

ISBN 978-966-474-046-0

ВІД АВТОРІВ

Любі дев'ятикласники!

У цьому навчальному році ви продовжуватимете вивчати геометрію. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу і красиву науку, а отже, з інтересом будете засвоювати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на шість параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено зірочкою (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі у тестовій формі з рубрики «Перевір себе».

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете знати більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

Шановні колеги!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка і факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

задачі, у яких отримано результат, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач;

⊙ доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;

доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;

⊛ доведення теореми, не обов'язкове для вивчення;

▲ закінчення доведення теореми.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ §1

У цьому параграфі ви дізнаєтесь, що являють собою синус, косинус і тангенс кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Ви навчитеся за двома сторонами трикутника і кутом між ними знаходити третю сторону, а також за стороною і двома прилеглими до неї кутами знаходити дві інші сторони трикутника.

У 8 класі ви навчилися розв'язувати прямокутні трикутники. Вивчивши матеріал цього параграфа, ви зможете розв'язувати будь-які трикутники.

Ви дізнаєтеся про нові формули, за допомогою яких можна знаходити площу трикутника.

1. Синус, косинус і тангенс кута від 0° до 180°

Перед вивченням цього пункту рекомендуємо повторити зміст пункту 14 на с. 249.

Поняття «синус», «косинус» і «тангенс» гострого кута вам знайомі з курсу геометрії 8 класу. Розширимо ці поняття для будь-якого кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

У верхній півплощині координатної площини розглянемо півколо з центром у початку координат, радіус якого дорівнює 1 (рис. 1). Таке півколо називають **одиничним**.

Будемо говорити, що **куту** α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) **відповідає точка** M одиничного півкола, якщо $\angle MOA = \alpha$, де точки O і A мають відповідно координати (0; 0) і (1; 0) (рис. 1). Наприклад, на рисунку 1 куту, який дорівнює 90°, відповідає точка C; куту, який дорівнює 180°, — точка B; куту, який дорівнює 0°, — точка A.

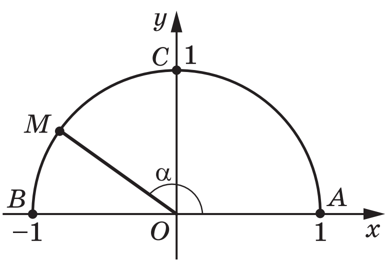


Рис. 1

Нехай α — гострий кут. Йому відповідає деяка точка M (x; y) дуги AC (рис. 2). З прямокутного трикутника OMN маємо:

$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM}, \quad \sin\alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Оскільки $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, то

$$x = \cos\alpha,\ y = \sin\alpha.$$

Отже, косинус і синус гострого кута α — це відповідно абсциса і ордината точки M одиничного півкола, яка відповідає куту α.

Отриманий результат підказує, як визначити синус і косинус будь-якого кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Означення. Косинусом і синусом кута α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) називають відповідно абсцису x і ординату y точки M одиничного півкола, яка відповідає куту α (рис. 3).

Користуючись таким означенням, можна, наприклад, записати: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

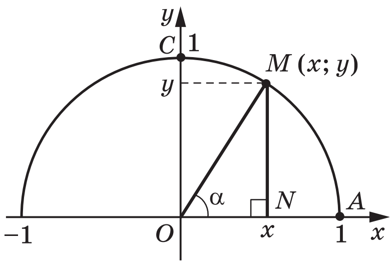


Рис. 2

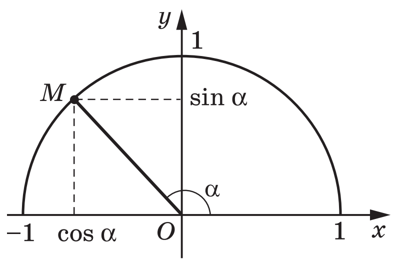


Рис. 3

Якщо M (x; y) — довільна точка одиничного півкола, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$ і $0 \leqslant y \leqslant 1$. Отже, для будь-якого кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, маємо:

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Якщо α — тупий кут, то абсциса точки одиничного півкола, що відповідає цьому куту, є від'ємною. Отже, косинус тупого кута є від'ємним числом. Зрозуміло, що справедливе і таке твердження: якщо $\cos\alpha < 0$, то α — тупий або розгорнутий кут.

Із курсу геометрії 8 класу ви знаєте, що для будь-якого гострого кута α

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,\\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha\end{gathered}}$$

Ці формули залишаються справедливими і для $\alpha = 0°$, і для $\alpha = 90°$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Нехай кутам α і $180° - \alpha$, де $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 90°$ і $\alpha \neq 180°$, відповідають точки $M\ (x_1;\ y_1)$ і $N\ (x_2;\ y_2)$ одиничного півкола (рис. 4).

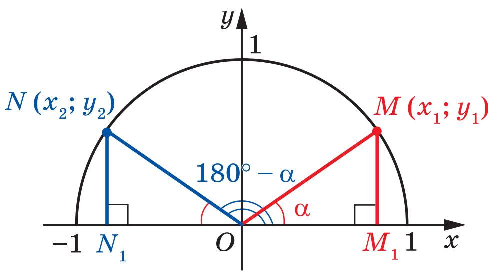


Рис. 4

Прямокутні трикутники OMM_1 і ONN_1 рівні за гіпотенузою і гострим кутом ($ON = OM = 1$, $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \alpha$). Звідси $y_2 = y_1$ і $x_2 = -x_1$. Отже,

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,\\ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha\end{gathered}}$$

Переконайтеся самостійно, що ці рівності залишаються правильними для $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$.

Якщо α — гострий кут, то, як ви знаєте з курсу геометрії 8 класу, справедлива тотожність

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,}$$

яка залишається правильною для $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Нехай α — тупий кут. Тоді $180° - \alpha$ є гострим кутом. Маємо:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin(180° - \alpha))^2 + (-\cos(180° - \alpha))^2 =$$
$$= \sin^2(180° - \alpha) + \cos^2(180° - \alpha) = 1.$$

Отже, рівність $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ виконується для всіх $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Означення. Тангенсом кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ і $\alpha \neq 90°$, називають відношення $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, тобто

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Оскільки $\cos 90° = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha$ не визначений для $\alpha = 90°$.

Очевидно, що кожному куту α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) відповідає *єдина* точка одиничного півкола. Отже, кожному куту α відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq 90°$). Тому залежність значень синуса (косинуса, тангенса) від величини кута є функціональною.

Функції $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, які відповідають цим функціональним залежностям, називають **тригонометричними функціями** кута α.

Задача. *Доведіть, що* $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Розв'язання

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Приклад. Знайдіть $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 120°$.

Розв'язання. Маємо:

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}.$$

1. Яке півколо називають одиничним?

2. Поясніть, у якому випадку кажуть, що куту α відповідає точка M одиничного півкола.

3. Що називають синусом кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
4. Що називають косинусом кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
5. Чому дорівнює $\sin 0°$? $\cos 0°$? $\sin 90°$? $\cos 90°$? $\sin 180°$? $\cos 180°$?
6. У яких межах знаходяться значення $\sin\alpha$, якщо $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
7. У яких межах знаходяться значення $\cos\alpha$, якщо $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
8. Яким числом, додатним чи від'ємним, є синус гострого кута? синус тупого кута? косинус гострого кута? косинус тупого кута?
9. Яким кутом є кут α, якщо $\cos\alpha < 0$?
10. Чому дорівнює $\sin(180° - \alpha)$? $\cos(180° - \alpha)$?
11. Як пов'язані між собою синус і косинус одного й того самого кута?
12. Що називають тангенсом кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ і $\alpha \neq 90°$?
13. Чому $\operatorname{tg}\alpha$ не визначений для $\alpha = 90°$?
14. Яку загальну назву мають функції $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$ і $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$?

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

1.° Накресліть одиничне півколо, узявши за одиничний відрізок п'ять клітинок зошита. Побудуйте кут, вершиною якого є початок координат, а однією зі сторін — додатна піввісь x:

1) косинус якого дорівнює $\frac{1}{5}$;
2) косинус якого дорівнює $-0,4$;
3) синус якого дорівнює $0,6$;
4) синус якого дорівнює 1;
5) косинус якого дорівнює 0;
6) косинус якого дорівнює -1.

ВПРАВИ

2.° Чому дорівнює:

1) $\sin(180° - \alpha)$, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{3}$;
2) $\cos(180° - \alpha)$, якщо $\cos\alpha = 0,7$;

3) $\cos(180° - \alpha)$, якщо $\cos\alpha = -\frac{4}{9}$;

4) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -5$?

3.° Кути α і β суміжні, $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$.

1) Знайдіть $\cos\beta$.
2) Який із кутів α і β є гострим, а який — тупим?

4.° Знайдіть значення виразу:

1) $2\sin 90° + 3\cos 0°$;
2) $3\sin 0° - 5\cos 180°$;
3) $\operatorname{tg} 23° \cdot \operatorname{tg} 0° \cdot \operatorname{tg} 106°$;
4) $6\operatorname{tg} 180° + 5\sin 180°$;
5) $\cos^2 165° + \sin^2 165°$;
6) $\frac{\sin 0° + \sin 90°}{\cos 0° - \cos 90°}$.

5.° Обчисліть:

1) $4\cos 90° + 2\cos 180°$;
2) $\cos 0° - \cos 180° + \sin 90°$.

6.° Чому дорівнює синус кута, якщо його косинус дорівнює: 1) 1; 2) 0?

7.° Чому дорівнює косинус кута, якщо його синус дорівнює: 1) 1; 2) 0?

8.° Знайдіть $\sin 135°$, $\cos 135°$, $\operatorname{tg} 135°$.

9.° Знайдіть $\sin 150°$, $\cos 150°$, $\operatorname{tg} 150°$.

10.° Чи існує кут α, для якого:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$;
2) $\sin\alpha = 0{,}3$;
3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$;
4) $\cos\alpha = -0{,}99$;
5) $\cos\alpha = 1{,}001$;
6) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$?

11.• Знайдіть:

1) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ і $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$;

2) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ і $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

3) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

4) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0{,}8$.

12.• Знайдіть:

1) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{5}{13}$;

2) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{1}{6}$.

13.$^{\bullet}$ Чи є правильним твердження (відповідь обґрунтуйте):
1) косинус гострого кута більший за косинус тупого кута;
2) існує кут, синус і косинус якого рівні;
3) існує кут, синус і косинус якого дорівнюють нулю;
4) косинус кута трикутника може дорівнювати від'ємному числу;
5) синус кута трикутника може дорівнювати від'ємному числу;
6) косинус кута трикутника може дорівнювати нулю;
7) синус кута трикутника може дорівнювати нулю;
8) косинус кута трикутника може дорівнювати -1;
9) синус кута трикутника може дорівнювати 1;
10) синус кута, відмінного від прямого, менший від синуса прямого кута;
11) косинус розгорнутого кута менший від косинуса кута, відмінного від розгорнутого;
12) синуси суміжних кутів рівні;
13) косинуси нерівних суміжних кутів є протилежними числами;
14) якщо косинуси двох кутів рівні, то рівні й самі кути;
15) якщо синуси двох кутів рівні, то рівні й самі кути;
16) тангенс гострого кута більший за тангенс тупого кута?

14.$^{\bullet}$ Порівняйте з нулем значення виразу:
1) $\sin 110° \cos 140°$;
2) $\sin 80° \cos 100° \cos 148°$;
3) $\sin 128° \cos^2 130° \operatorname{tg} 92°$;
4) $\sin 70° \cos 90° \operatorname{tg} 104°$.

15.$^{\bullet}$ У трикутнику ABC $\angle B = 60°$, точка O — центр вписаного кола. Чому дорівнює косинус кута AOC?

16.$^{\bullet}$ Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC, $\cos \angle BOC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайдіть кут A трикутника.

17.$^{\bullet}$ Знайдіть значення виразу:
1) $2 \sin 120° + 4 \cos 150° - 2 \operatorname{tg} 135°$;
2) $\cos 120° - 8 \sin^2 150° + 3 \cos 90° \cos 162°$;
3) $\cos 180° (\sin 135° \operatorname{tg} 60° - \cos 135°)^2$.

18.• Чому дорівнює значення виразу:
1) $2\sin 150° - 4\cos 120°$;
2) $\sin 90° (\operatorname{tg} 150° \cos 135° - \operatorname{tg} 120° \cos 135°)^2$?

19.• Знайдіть значення виразу, не користуючись таблицями і калькулятором:

1) $\dfrac{\sin 18°}{\sin 162°}$; 2) $\dfrac{\cos 18°}{\cos 162°}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 18°}{\operatorname{tg} 162°}$.

20.• Обчисліть:

1) $\dfrac{\sin 28°}{\sin 152°}$; 2) $\dfrac{\cos 49°}{\cos 131°}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 12°}{\operatorname{tg} 168°}$.

21.• Знайдіть суму квадратів синусів усіх кутів прямокутного трикутника.

22.• Знайдіть суму квадратів косинусів усіх кутів прямокутного трикутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

23. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, дорівнює 5 см і ділить сторону паралелограма навпіл. Гострий кут паралелограма дорівнює 30°. Знайдіть діагональ паралелограма, проведену з вершини тупого кута, і кути, які вона утворює зі сторонами паралелограма.

24. Пряма CE паралельна бічній стороні AB трапеції $ABCD$ і ділить основу AD на відрізки AE і DE такі, що $AE = 7$ см, $DE = 10$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

25. Дві сторони трикутника дорівнюють 8 см і 11 см. Чи може кут, протилежний стороні завдовжки 8 см, бути: 1) тупим; 2) прямим? Відповідь обґрунтуйте.

26. У трикутнику ABC проведено висоту BD, $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$, $AB = 10$ см. Знайдіть сторону BC.

27. Знайдіть висоту BD трикутника ABC і проекцію сторони AB на пряму AC, якщо $\angle BAC = 150°$, $AB = 12$ см.

2. Теорема косинусів

Із першої ознаки рівності трикутників випливає, що дві сторони і кут між ними однозначно визначають трикутник. Отже, за вказаними елементами можна знайти третю сторону трикутника. Як це зробити, показує така теорема.

Теорема 2.1 (теорема косинусів). ***Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними.***

Доведення. Розглянемо трикутник ABC. Доведемо, наприклад, що

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Можливі три випадки:

1) кут A — гострий;
2) кут A — тупий;
3) кут A — прямий.

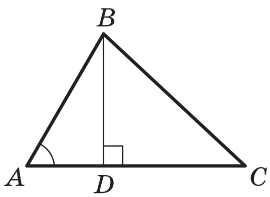


Рис. 5

• Розглянемо перший випадок. Якщо $\angle A < 90°$, тоді хоча б один з кутів B і C є гострим. Нехай, наприклад, $\angle C < 90°$. Проведемо висоту BD (рис. 5).

З $\triangle ABD$ отримуємо: $BD = AB \cdot \sin A$, $AD = AB \cdot \cos A$.

З $\triangle BDC$ отримуємо: $BC^2 = BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC - AD)^2 =$

$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$$
$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$$
$$= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Якщо $\angle C \geqslant 90°$, то $\angle B < 90°$. Тоді потрібно провести висоту трикутника ABC з вершини C. Далі доведення аналогічне розглянутому.

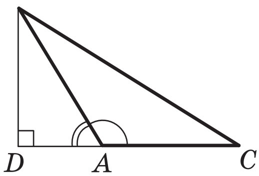


Рис. 6

• Для випадку, коли кут A — тупий, проведемо висоту BD трикутника ABC (рис. 6).

З $\triangle ABD$ отримуємо: $BD = AB \times$ $\times \sin \angle BAD = AB \cdot \sin(180° - \angle BAC) =$ $= AB \cdot \sin \angle BAC$, $AD = AB \cdot \cos \angle BAD =$

$$= AB \cdot \cos(180° - \angle BAC) =$$
$$= -AB \cdot \cos \angle BAC.$$

З $\triangle BDC$ отримуємо: $BC^2 = BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC + AD)^2 =$
$= AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 =$
$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC.$

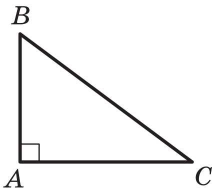


Рис. 7

• Якщо кут A — прямий (рис. 7), то $\cos A = 0$. Рівність, яку потрібно довести, набуває вигляду

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

і виражає теорему Піфагора для трикутника ABC ($\angle A = 90°$). ▲

Та частина доведення, у якій розглянуто випадок, коли $\angle A$ — прямий, показує, що теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів. Тому теорема косинусів є узагальненням теореми Піфагора.

Якщо скористатися позначенням для сторін і кутів трикутника ABC (див. форзац), то, наприклад, для сторони a можна записати:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha.$$

За допомогою теореми косинусів, знаючи три сторони трикутника, можна визначити, чи є він гострокутним, тупокутним або прямокутним.

Теорема 2.2 (наслідок з теореми косинусів). ***Нехай a, b і c — сторони трикутника ABC, причому a — його найбільша сторона. Якщо $a^2 < b^2 + c^2$, то трикутник є гострокутним. Якщо $a^2 > b^2 + c^2$, то трикутник є тупокутним. Якщо $a^2 = b^2 + c^2$, то трикутник є прямокутним.***

Доведення. Маємо:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Звідси $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$.

Нехай $a^2 < b^2 + c^2$. Тоді $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Отже, $2bc\cos\alpha > 0$, тобто $\cos\alpha > 0$. Тому кут α — гострий.

Оскільки a — найбільша сторона трикутника, то проти неї лежить найбільший кут, який на підставі вищедоведеного є гострим. Отже, у цьому випадку трикутник є гострокутним.

Нехай $a^2 > b^2 + c^2$. Тоді $b^2 + c^2 - a^2 < 0$. Отже, $2bc\cos\alpha < 0$, тобто $\cos\alpha < 0$. Тому кут α — тупий.

Нехай $a^2 = b^2 + c^2$. Тоді $2bc\cos\alpha = 0$, тобто $\cos\alpha = 0$. Звідси $\alpha = 90°$. ▲

Задача. *Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.*

Розв'язання. На рисунку 8 зображено паралелограм $ABCD$.

Нехай $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\angle BAD = \alpha$, тоді $\angle ADC = 180° - \alpha$.

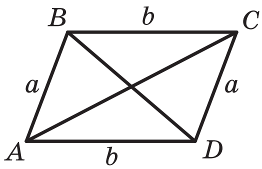


Рис. 8

З ΔABD за теоремою косинусів

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \qquad (1)$$

З ΔACD за теоремою косинусів

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha)$ або

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

Додавши рівності (1) і (2), отримаємо

$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Приклад 1. У трикутнику ABC сторона AB на 4 см більша за сторону BC, $\angle B = 120°$, $AC = 14$ см. Знайдіть сторони AB і BC.

Розв'язання. За теоремою косинусів

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos B.$$

Нехай $BC = x$ см, $x > 0$, тоді $AB = (x + 4)$ см.

Маємо:

$$14^2 = (x + 4)^2 + x^2 - 2x(x + 4)\cos 120°;$$

$$196 = x^2 + 8x + 16 + x^2 - 2x(x + 4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$196 = 2x^2 + 8x + 16 + x(x + 4);$$

$$3x^2 + 12x - 180 = 0;$$

$$x^2 + 4x - 60 = 0;$$

$$x_1 = 6;\ x_2 = -10.$$

Корінь $x_2 = -10$ не задовольняє умову $x > 0$.

Отже, $BC = 6$ см, $AB = 10$ см.

Відповідь: 10 см, 6 см.

Приклад 2. На стороні AC трикутника ABC позначено точку D так, що $CD : AD = 1 : 2$. Знайдіть відрізок BD, якщо $AB = 14$ см, $BC = 13$ см, $AC = 15$ см.

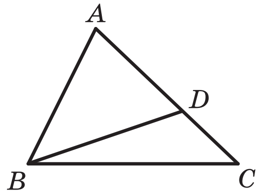


Рис. 9

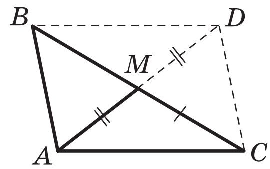


Рис. 10

Розв'язання. За теоремою косинусів з $\Delta\, ABC$ (рис. 9):

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C,$$

звідси

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{225 + 169 - 196}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{33}{65}.$$

Оскільки $CD : AD = 1 : 2$, то $CD = \frac{1}{3} AC = 5$ см.

Тоді з $\Delta\, BCD$:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C =$$

$$= 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{33}{65} = 128.$$

Отже, $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (см).

Відповідь: $8\sqrt{2}$ см.

Приклад 3. Дві сторони трикутника дорівнюють 23 см і 30 см, а медіана, проведена до більшої з відомих сторін, — 10 см. Знайдіть третю сторону трикутника.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC (рис. 10) $AC = 23$ см, $BC = 30$ см, відрізок AM — медіана, $AM = 10$ см.

На продовженні відрізка AM за точку M відкладено відрізок MD, який дорівнює медіані AM. Тоді $AD = 20$ см.

У чотирикутнику $ABDC$ діагоналі AD і BC точкою M перетину діляться навпіл ($BM = MC$ за умовою, $AM = MD$ за побудовою). Отже, чотирикутник $ABDC$ — паралелограм.

За властивістю діагоналей паралелограма маємо:

$$AD^2 + BC^2 = 2\,(AB^2 + AC^2).$$

Тоді

$$20^2 + 30^2 = 2\,(AB^2 + 23^2);$$
$$400 + 900 = 2\,(AB^2 + 529);$$

$$AB^2 = 121;$$
$$AB = 11 \text{ см}.$$

Відповідь: 11 см.

1. Сформулюйте теорему косинусів.

2. Гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник зі сторонами a, b і c, де a — його найбільша сторона, якщо:

1) $a^2 < b^2 + c^2$;

2) $a^2 > b^2 + c^2$;

3) $a^2 = b^2 + c^2$?

3. Як пов'язані між собою діагоналі і сторони паралелограма?

ВПРАВИ

28.° Знайдіть невідому сторону трикутника ABC, якщо:

1) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;

2) $AB = 3$ см, $AC = 2\sqrt{2}$ см, $\angle A = 135°$.

29.° Знайдіть невідому сторону трикутника DEF, якщо:

1) $DE = 4$ см, $DF = 2\sqrt{3}$ см, $\angle D = 30°$;

2) $DF = 3$ см, $EF = 5$ см, $\angle F = 120°$.

30.° Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 20 см і 28 см. Знайдіть найбільший кут трикутника.

31.° Сторони трикутника дорівнюють $\sqrt{18}$ см, 5 см і 7 см. Знайдіть середній за величиною кут трикутника.

32.° Установіть, гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник, сторони якого дорівнюють:

1) 5 см, 7 см і 9 см;

2) 5 см, 12 см і 13 см;

3) 10 см, 15 см і 18 см.

33.° Сторони трикутника дорівнюють 7 см, 8 см і 12 см. Чи є правильним твердження, що даний трикутник є гострокутним?

34.° Доведіть, що трикутник зі сторонами 8 см, 15 см і 17 см є прямокутним.

35.° Сторони паралелограма дорівнюють $2\sqrt{2}$ см і 5 см, а один із кутів дорівнює 45°. Знайдіть діагоналі паралелограма.

36.° У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $BC = 3$ см, $AD = 10$ см, $CD = 4$ см, $\angle D = 60°$. Знайдіть діагоналі трапеції.

37.° На стороні AB рівностороннього трикутника ABC позначено точку D так, що $AD : DB = 2 : 1$. Знайдіть відрізок CD, якщо $AB = 6$ см.

38.° На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : BM = 1 : 3$. Знайдіть відрізок CM, якщо $AC = BC = 4$ см.

39.• Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 4 см, а синус кута між ними дорівнює $\frac{\sqrt{35}}{6}$. Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

40.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = 20$ см, $BC = 15$ см. На стороні AB позначено точку M так, що $BM = 4$ см. Знайдіть довжину відрізка CM.

41.• На продовженні гіпотенузи AB прямокутного рівнобедреного трикутника ABC за точку B позначено точку D так, що $BD = BC$. Знайдіть відрізок CD, якщо катет трикутника ABC дорівнює a.

42.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $AC = 12$ см. На продовженні гіпотенузи AB за точку B позначено точку D так, що $BD = 26$ см. Знайдіть довжину відрізка CD.

43.• Центр кола, вписаного в прямокутний трикутник, знаходиться на відстанях a і b від кінців гіпотенузи. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

44.• Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC, $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120°$. Знайдіть сторону AB.

45.• Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює 60°, відносяться як 5 : 8, а третя сторона дорівнює 21 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

46.• Дві сторони трикутника відносяться як $1 : 2\sqrt{3}$ і утворюють кут у 30°. Третя сторона трикутника дорівнює $2\sqrt{7}$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

47.• Сума двох сторін трикутника, які утворюють кут у 120°, дорівнює 8 см, а довжина третьої сторони становить 7 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

48.• Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює $120°$, відносяться як $5 : 3$. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 30 см.

49.• Дві сторони трикутника дорівнюють 16 см і 14 см, а кут, протилежний меншій із відомих сторін, дорівнює $60°$. Знайдіть невідому сторону трикутника.

50.• Дві сторони трикутника дорівнюють 15 см і 35 см, а кут, протилежний більшій із відомих сторін, дорівнює $120°$. Знайдіть периметр трикутника.

51.• На стороні BC трикутника ABC позначено точку D так, що $CD = 14$ см. Знайдіть відрізок AD, якщо $AB = 37$ см, $BC = 44$ см і $AC = 15$ см.

52.• На стороні AB трикутника ABC позначено точку K, а на продовженні сторони BC за точку C — точку M. Знайдіть відрізок MK, якщо $AB = 15$ см, $BC = 7$ см, $AC = 13$ см, $AK = 8$ см, $MC = 3$ см.

53.• Одна зі сторін трикутника у 2 рази більша за другу, а кут між цими сторонами становить $60°$. Доведіть, що даний трикутник є прямокутним.

54.• Доведіть, що коли квадрат сторони трикутника дорівнює неповному квадрату суми двох інших сторін, то протилежний цій стороні кут дорівнює $120°$.

55.• Доведіть, що коли квадрат сторони трикутника дорівнює неповному квадрату різниці двох інших сторін, то протилежний цій стороні кут дорівнює $60°$.

56.• Дві сторони паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см, а одна з діагоналей — 12 см. Знайдіть другу діагональ паралелограма.

57.• Діагоналі паралелограма дорівнюють 13 см і 11 см, а одна зі сторін — 9 см. Знайдіть периметр паралелограма.

58.• Діагоналі паралелограма дорівнюють 8 см і 14 см, а одна зі сторін на 2 см більша за другу. Знайдіть сторони паралелограма.

59.• Сторони паралелограма дорівнюють 11 см і 23 см, а його діагоналі відносяться як $2 : 3$. Знайдіть діагоналі паралелограма.

60.$^{\bullet\bullet}$ У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) відомо, що $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AD = 16$ см, $\cos A = \frac{1}{7}$. Знайдіть сторону CD трапеції.

61.$^{\bullet\bullet}$ У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) відомо, що $AB = \sqrt{15}$ см, $BC = 6$ см, $CD = 4$ см, $AD = 11$ см. Знайдіть косинус кута D трапеції.

62.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть діагональ AC чотирикутника $ABCD$, якщо навколо нього можна описати коло, і $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см, $AD = 6$ см.

63.$^{\bullet\bullet}$ Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо $AB = 4$ см, $AD = 3$ см, $BD = 6$ см і $\angle C = 30°$?

64.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що проти більшого кута паралелограма лежить більша діагональ. Сформулюйте і доведіть обернене твердження.

65.$^{\bullet\bullet}$ Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 15 см і 18 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини його найбільшого кута.

66.$^{\bullet\bullet}$ Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а бічна сторона — 20 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини кута при його основі.

67.$^{\bullet\bullet}$ Сторони трикутника дорівнюють 16 см, 18 см і 26 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до його більшої сторони.

68.$^{\bullet\bullet}$ Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а медіана, проведена до бічної сторони, — 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

69.$^{\bullet\bullet}$ Дві сторони трикутника дорівнюють 12 см і 14 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 7 см. Знайдіть невідому сторону трикутника.

70.$^{\bullet\bullet}$ У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle ABC = 120°$. На продовженні відрізка AB за точку B позначено точку D так, що $BD = 2AB$. Доведіть, що трикутник ACD рівнобедрений.

71.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, де a, b і c — сторони трикутника, m_c — медіана трикутника, проведена до сторони c.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

72. У колі проведено діаметр AC і хорду AB, яка дорівнює радіусу кола. Знайдіть кути трикутника ABC.

73. Один із кутів, утворених при перетині бісектриси кута паралелограма з його стороною, дорівнює одному з кутів паралелограма. Знайдіть кути паралелограма.

74. У трикутник ABC вписано паралелограм $ADEF$ так, що кут A у них спільний, а точки D, E і F належать відповідно сторонам AB, BC і AC трикутника. Знайдіть сторони паралелограма $ADEF$, якщо AB = 8 см, AC = 12 см, $AD : AF = 2 : 3$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

75. Знайдіть кут ADC (рис. 11), якщо $\angle ABC = 140°$.

76. Знайдіть кут ABC (рис. 12), якщо $\angle ADC = 43°$.

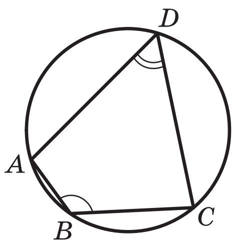


Рис. 11

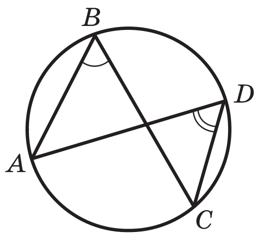


Рис. 12

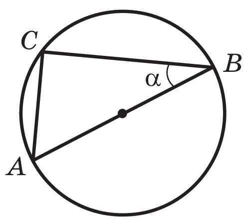


Рис. 13

77. Відрізок AB — діаметр кола, радіус якого дорівнює R, $\angle ABC = \alpha$ (рис. 13). Знайдіть хорду AC.

Поновіть у пам’яті зміст пункту 8 на с. 247.

3. Теорема синусів

Із другої ознаки рівності трикутників випливає, що сторона і два прилеглі до неї кути однозначно визначають трикутник. Отже, за вказаними елементами можна знайти дві інші сторони трикутника. Як це зробити, підказує така теорема.

Теорема 3.1 (теорема синусів). ***Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.***

Лема. ***Хорда кола дорівнює добутку діаметра на синус будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду.***

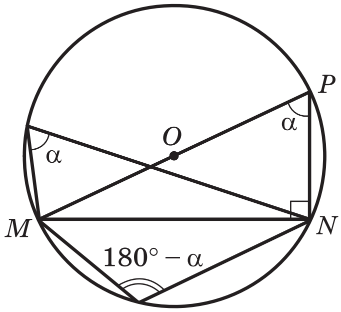


Рис. 14

Доведення. ⊙ На рисунку 14 відрізок MN — хорда кола з центром у точці O. Проведемо діаметр MP. Тоді $\angle MNP = 90°$ як вписаний кут, що спирається на діаметр. Нехай величина вписаного кута MPN дорівнює α. Тоді з прямокутного трикутника MPN отримуємо

$$MN = MP \sin\alpha. \qquad (1)$$

Усі вписані кути, які спираються на хорду MN, дорівнюють α або $180° - \alpha$. Отже, їх синуси рівні. Тому отримана рівність (1) справедлива для всіх вписаних кутів, які спираються на хорду MN. ▲

Тепер ми можемо довести теорему синусів.

Доведення. ⊙ Нехай у трикутнику ABC відомо, що $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Доведемо, що

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Нехай радіус описаного кола трикутника ABC дорівнює R. Тоді за лемою $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$. Звідси

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$ ▲

Наслідок. ***Радіус описаного кола трикутника можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\boldsymbol{R = \frac{a}{2\sin\alpha}},}$$

де a — сторона трикутника, α — протилежний їй кут.

П р и к л а д 1. У трикутнику ABC відомо, що $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 45°$. Знайдіть кут A.

Р о з в'я з а н н я. За теоремою синусів

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Тоді маємо:

$$\sin A = \frac{BC \sin B}{AC} = \frac{1 \cdot \sin 45°}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Отже, $\angle A$ — гострий. Звідси, ураховуючи, що $\sin A = \frac{1}{2}$, отримуємо $\angle A = 30°$.

В і д п о в і д ь: 30°.

П р и к л а д 2. У трикутнику ABC відомо, що $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle A = 30°$. Знайдіть кут B.

Р о з в'я з а н н я. Маємо:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B},$$

$$\sin B = \frac{AC \sin A}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Оскільки $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Тоді кут B може бути як гострим, так і тупим. Звідси $\angle B = 45°$ або $\angle B = 180° - 45° = 135°$.

В і д п о в і д ь: 45° або 135°.

П р и к л а д 3. На стороні AB трикутника ABC (рис. 15) позначено точку D так, що $\angle BDC = \gamma$, $AD = m$. Знайдіть BD, якщо $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Р о з в'я з а н н я. $\angle BDC$ — зовнішній кут трикутника ADC. Тоді $\angle ACD + \angle A = \angle BDC$, звідси $\angle ACD = \gamma - \alpha$.

З $\Delta\, ADC$ за теоремою синусів:

$$\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AD}{\sin \angle ACD}.$$

Отже, $CD = \dfrac{AD \sin \angle CAD}{\sin \angle ACD} = \dfrac{m \sin \alpha}{\sin(\gamma - \alpha)}.$

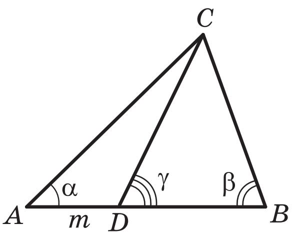


Рис. 15

З Δ BCD:

$$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD};$$

$$BD=\frac{CD\sin\angle BCD}{\sin\angle CBD}=\frac{m\sin\alpha\sin(180^\circ-(\beta+\gamma))}{\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)}=\frac{m\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)}.$$

Відповідь: $\dfrac{m\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)}$.

Приклад 4. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 105^\circ$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника BDC, дорівнює $8\sqrt{6}$ см.

Розв'язання. Нехай R_1 — радіус кола, описаного навколо трикутника BDC (рис. 16), $R_1=8\sqrt{6}$ см.

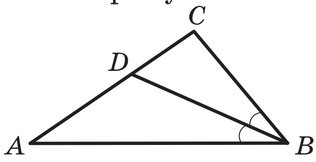


Рис. 16

$$\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=15^\circ.$$

З Δ BDC:

$\angle BDC = 180^\circ - (\angle CBD + \angle C) = 180^\circ - (15^\circ + 105^\circ) = 60^\circ$.

Тоді $\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=2R_1$, звідси

$$BC=2R_1\sin\angle BDC=2\cdot 8\sqrt{6}\sin 60^\circ=24\sqrt{2}\ \text{(см)}.$$

З Δ ABC:

$\angle A = 180^\circ - (\angle ABC + \angle C) = 180^\circ - (30^\circ + 105^\circ) = 45^\circ$.

Нехай R — шуканий радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

Тоді $\dfrac{BC}{\sin A}=2R$, звідси $R=\dfrac{BC}{2\sin A}=\dfrac{24\sqrt{2}}{2\sin 45^\circ}=24$ (см).

Відповідь: 24 см.

1. Як знайти хорду кола, якщо відомо діаметр кола і вписаний кут, який спирається на цю хорду?
2. Сформулюйте теорему синусів.
3. Як знайти радіус кола, описаного навколо трикутника зі стороною a і протилежним цій стороні кутом α?

ВПРАВИ

78.° Знайдіть сторону BC трикутника ABC, зображеного на рисунку 17 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

79.° Знайдіть кут A трикутника ABC, зображеного на рисунку 18 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

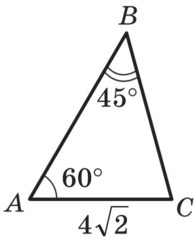


Рис. 17

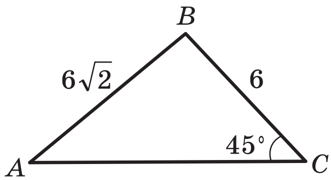


Рис. 18

80.° Знайдіть сторону AB трикутника ABC, якщо $AC = \sqrt{6}$ см, $\angle B = 120°$, $\angle C = 45°$.

81.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, $\sin A = 0{,}2$. Знайдіть синус кута C трикутника.

82.° У трикутнику DEF відомо, що $DE = 16$ см, $\angle F = 50°$, $\angle D = 38°$. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

83.° У трикутнику MKP відомо, що $KP = 8$ см, $\angle K = 106°$, $\angle P = 32°$. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

84.° Для знаходження відстані від точки A до дзвіниці B, яка розташована на іншому березі річки (рис. 19), за допомогою віх, рулетки і приладу для вимірювання кутів (теодоліту) позначили на місцевості точку C таку, що $\angle BAC = 42°$, $\angle ACB = 64°$, $AC = 20$ м. Як знайти відстань від A до B? Знайдіть цю відстань.

Рис. 19

85.° У трикутнику ABC відомо, що $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Знайдіть AB і AC.

86.° Діагональ паралелограма дорівнює d і утворює з його сторонами кути α і β. Знайдіть сторони паралелограма.

87.° Знайдіть кут A трикутника ABC, якщо:

1) $AC = 2$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 135°$;

2) $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle B = 45°$.

Скільки розв'язків у кожному з випадків має задача? Відповідь обґрунтуйте.

88.° Чи існує трикутник ABC такий, що $\sin A = 0{,}4$, $AC = 18$ см, $BC = 6$ см? Відповідь обґрунтуйте.

89.° У трикутнику DEF відомо, що $DE = 8$ см, $\sin F = 0{,}16$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника DEF.

90.° Радіус кола, описаного навколо трикутника MKP, дорівнює 5 см, $\sin M = 0{,}7$. Знайдіть сторону KP.

91.• На продовженні сторони AB трикутника ABC за точку B позначено точку D. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ACD, якщо $\angle ABC = 60°$, $\angle ADC = 45°$, а радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює 4 см.

92.• Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює 6 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника AOC, де O — точка перетину бісектрис трикутника ABC, якщо $\angle ABC = 60°$.

93.• За рисунком 20 знайдіть AD, якщо $CD = a$.

94.• За рисунком 21 знайдіть AC, якщо $BD = m$.

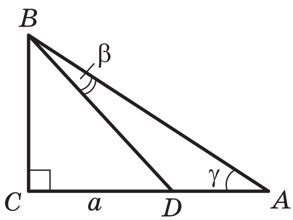


Рис. 20

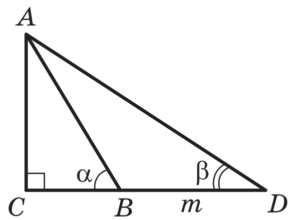


Рис. 21

95.• На стороні AB трикутника ABC позначено точку M так, що $\angle AMC = \varphi$. Знайдіть відрізок CM, якщо $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$.

96.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороні BC позначено точку D так, що $\angle ADB = \varphi$, $AD = m$. Знайдіть сторону BC.

97.$^{\bullet}$ Доведіть, що бісектриса трикутника поділяє його сторону на відрізки, довжини яких обернено пропорційні синусам прилеглих до цієї сторони кутів.

98.$^{\bullet}$ Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 12 см, а висота, проведена до третьої сторони, — 4 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного трикутника.

99.$^{\bullet}$ Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою 16 см і бічною стороною 10 см.

100.$^{\bullet}$ Сторона трикутника дорівнює 24 см, а радіус описаного кола — $8\sqrt{3}$ см. Чому дорівнює кут трикутника, протилежний даній стороні?

101.$^{\bullet}$ Траса для велосипедистів має форму трикутника, два кути якого дорівнюють $50°$ і $100°$. Меншу сторону цього трикутника один із велосипедистів проїжджає за 1 год. За який час він проїде всю трасу? Відповідь подайте у годинах із точністю до десятих.

102.$^{\bullet\bullet}$ У трикутнику ABC $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Знайдіть бісектрису BD трикутника.

103.$^{\bullet\bullet}$ Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, протилежний їй кут дорівнює α. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини кута при основі.

104.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, користуючись теоремою синусів, що бісектриса трикутника поділяє його сторону на відрізки, довжини яких пропорційні прилеглим сторонам[1].

105.$^{\bullet\bullet}$ Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а висота — 8 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

106.$^{\bullet\bullet}$ Відрізок CD — бісектриса трикутника ABC, у якому $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Через точку D проведено пряму, яка паралельна стороні BC і перетинає сторону AC у точці E, причому $AE = a$. Знайдіть CE.

107.$^{\bullet\bullet}$ Медіана AM трикутника ABC дорівнює m і утворює зі сторонами AB і AC кути α і β відповідно. Знайдіть сторони AB і AC.

[1] Нагадаємо, що цей факт з використанням теореми про пропорційні відрізки було доведено в підручнику: А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. «Геометрія. 8 клас». — Х.: Гімназія, 2008. — 208 с.

108.•• Медіана CD трикутника ABC утворює зі сторонами AC і BC кути α і β відповідно, $BC = a$. Знайдіть медіану CD.

109.•• Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Доведіть, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників AHB, BHC, AHC і ABC, рівні.

110.•• Дороги, які сполучають села A, B і C (рис. 22), утворюють трикутник, причому дорога із села A до села C заасфальтована, а дороги із села A до села B та із села B до села C — ґрунтові. Дороги із села A до сіл B і C утворюють кут у 15°, а дороги із села B до сіл A і C — кут у 5°. Швидкість руху автомобіля по асфальтованій дорозі у 2 рази більша за швидкість його руху по ґрунтовій. Який шлях обрати водію автомобіля, щоб якнайшвидше дістатися із села A до села B?

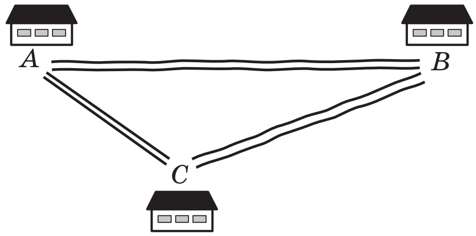


Рис. 22

111.•• Дороги із сіл A і B сходяться біля розвилки C (рис. 23). Дорога із села A до розвилки утворює з дорогою в село B кут у 30°, а дорога із села B з дорогою в село A — кут у 70°. Одночасно із села A до розвилки виїхав автомобіль зі швидкістю 90 км/год, а із села B — автобус зі швидкістю 60 км/год. Хто з них першим доїде до розвилки?

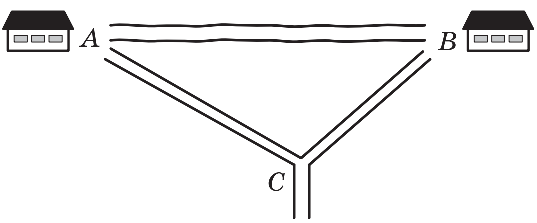


Рис. 23

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

112. Бісектриси кутів B і C прямокутника $ABCD$ перетинають сторону AD у точках M і K відповідно. Доведіть, що $BM = CK$.

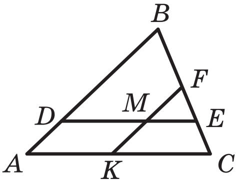


Рис. 24

113. На рисунку 24 $DE \parallel AC$, $FK \parallel AB$. Укажіть, які трикутники на цьому рисунку подібні.

114. На стороні AB квадрата $ABCD$ позначено точку K, а на стороні CD — точку M так, що $AK : KB = 1 : 2$, $DM : MC = 3 : 1$. Знайдіть сторону квадрата, якщо $MK = 13$ см.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

115. Розв'яжіть прямокутний трикутник:
1) за двома катетами $a = 7$ см і $b = 35$ см;
2) за гіпотенузою $c = 17$ см і катетом $a = 8$ см;
3) за гіпотенузою $c = 4$ см і гострим кутом $\alpha = 50°$;
4) за катетом $a = 8$ см і протилежним кутом $\alpha = 42°$.

Поновіть у пам'яті зміст пункту 15 на с. 250.

4. Розв'язування трикутників

Розв'язати трикутник — це означає знайти невідомі його сторони і кути за відомими сторонами і кутами.

У 8 класі ви навчилися розв'язувати прямокутні трикутники. Теореми косинусів і синусів дозволяють розв'язати будь-який трикутник.

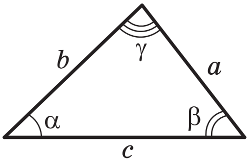


Рис. 25

Приклад 1. Розв'яжіть трикутник (рис. 25) за стороною $a = 12$ см і двома кутами $\beta = 36°$, $\gamma = 119°$.

Розв'язання. Маємо:
$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 155° = 25°.$

За теоремою синусів:

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha};\quad b=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{12\sin 36^\circ}{\sin 25^\circ}\approx\frac{12\cdot 0,588}{0,423}\approx 16,7\ (\text{см});$$

$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha};$$

$$c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{12\sin 119^\circ}{\sin 25^\circ}=\frac{12\sin 61^\circ}{\sin 25^\circ}\approx\frac{12\cdot 0,875}{0,423}\approx 24,8\ (\text{см}).$$

Відповідь: $b \approx 16,7$ см, $c \approx 24,8$ см; $\alpha = 25^\circ$.

Зауважимо, що значення тригонометричних функцій знайдено за таблицею, розміщеною на с. 268 підручника. Їх також можна було знайти за допомогою мікрокалькулятора.

Приклад 2. Розв'яжіть трикутник (рис. 25) за двома сторонами $a = 14$ см, $b = 8$ см і кутом $\gamma = 38^\circ$ між ними.

Розв'язання. За теоремою косинусів:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 196 + 64 - 2\cdot 14\cdot 8\cos 38^\circ \approx$$
$$\approx 260 - 224\cdot 0,788 = 83,488;$$
$$c \approx 9,1\ \text{см}.$$

Далі маємо:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\approx -0,338.$$

Знайдемо кут α_1 такий, що $\cos\alpha_1 = 0,338$.

Число 0,338 відсутнє в таблиці значень косинуса, найближчим до нього є число 0,342. Тоді отримуємо $\alpha_1 \approx 70^\circ$. Звідси $\alpha = 180^\circ - \alpha_1 \approx 110^\circ$.

$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \approx 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ$.

Відповідь: $c \approx 9,1$ см, $\alpha \approx 110^\circ$, $\beta \approx 32^\circ$.

Приклад 3. Розв'яжіть трикутник (рис. 25) за трьома сторонами $a = 7$ см, $b = 2$ см, $c = 8$ см.

Розв'язання. Маємо: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, звідси

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4+64-49}{2\cdot 2\cdot 8}\approx 0,594.\ \text{Тоді}\ \alpha\approx 54^\circ.$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta},\quad \sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}\approx\frac{2\sin 54^\circ}{7}\approx\frac{2\cdot 0,809}{7}\approx 0,231.$$

Оскільки b є найменшою стороною даного трикутника, то кут β є гострим, $\beta \approx 13°$.

Тоді $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 180° - 67° = 113°$.

Відповідь: $\alpha \approx 54°$, $\beta \approx 13°$, $\gamma \approx 113°$.

Приклад 4. Розв'яжіть трикутник (рис. 25) за двома сторонами і кутом, який протилежний одній зі сторін: 1) $a = 17$ см, $b = 6$ см, $\alpha = 156°$; 2) $b = 7$ см, $c = 8$ см, $\beta = 65°$; 3) $a = 6$ см, $b = 5$ см, $\beta = 50°$.

Розв'язання

1) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$,

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{6\sin 156°}{17} = \frac{6\sin 24°}{17} \approx \frac{6\cdot 0,407}{17} \approx 0,144.$$

Оскільки кут α даного трикутника тупий, то кут β є гострим, $\beta \approx 8°$.

Тоді $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 16°$.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma},\quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx \frac{a\sin 16°}{\sin 156°} \approx \frac{17\cdot 0,276}{0,407} \approx 11,5\ (\text{см}).$$

Відповідь: $\beta \approx 8°$, $\gamma \approx 16°$, $c \approx 11,5$ см.

2) $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$, $\quad \sin\gamma = \dfrac{c\sin\beta}{b} = \dfrac{8\sin 65°}{7} \approx \dfrac{8\cdot 0,906}{7} \approx 1,035 > 1,$

що неможливо.

Відповідь: задача не має розв'язку.

3) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$, $\quad \sin\alpha = \dfrac{a\sin\beta}{b} = \dfrac{6\sin 50°}{5} \approx \dfrac{6\cdot 0,766}{5} \approx 0,919.$

Можливі два випадки: $\alpha \approx 67°$ або $\alpha \approx 180° - 67° = 113°$.

Розглянемо випадок, коли $\alpha \approx 67°$:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 180° - 117° = 63°;$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},\quad c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} \approx \frac{5\sin 63°}{\sin 50°} \approx \frac{5\cdot 0,891}{0,766} \approx 5,8\ (\text{см}).$$

При $\alpha \approx 113°$ отримуємо:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 180° - 163° = 17°;$$

$$c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} \approx \frac{5\sin 17°}{\sin 50°} \approx \frac{5\cdot 0,292}{0,766} \approx 1,9\ (\text{см}).$$

Відповідь: $\alpha \approx 67°$, $\gamma \approx 63°$, $c \approx 5,8$ см або $\alpha \approx 113°$, $\gamma \approx 17°$, $c \approx 1,9$ см.

?

Що означає розв'язати трикутник?

ВПРАВИ

116.° Розв'яжіть трикутник за стороною і двома кутами[1]:

1) $a = 10$ см, $\beta = 20°$, $\gamma = 85°$;

2) $b = 16$ см, $\alpha = 40°$, $\beta = 110°$.

117.° Розв'яжіть трикутник за стороною і двома кутами:

1) $b = 9$ см, $\alpha = 35°$, $\gamma = 70°$;

2) $c = 14$ см, $\beta = 132°$, $\gamma = 24°$.

118.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами і кутом між ними:

1) $b = 18$ см, $c = 22$ см, $\alpha = 76°$;

2) $a = 20$ см, $b = 15$ см, $\gamma = 104°$.

119.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами і кутом між ними:

1) $a = 8$ см, $c = 6$ см, $\beta = 15°$;

2) $b = 7$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 145°$.

120.° Розв'яжіть трикутник за трьома сторонами:

1) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 7$ см;

2) $a = 26$ см, $b = 19$ см, $c = 42$ см.

121.° Розв'яжіть трикутник за трьома сторонами:

1) $a = 5$ см, $b = 6$ см, $c = 8$ см;

2) $a = 21$ см, $b = 17$ см, $c = 32$ см.

122.° Розв'яжіть трикутник, у якому:

1) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10°$, кут α — гострий;

2) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10°$, кут α — тупий.

123.• Розв'яжіть трикутник за двома сторонами і кутом, який лежить проти однієї із даних сторін:

1) $a = 7$ см, $b = 11$ см, $\beta = 46°$;

2) $b = 15$ см, $c = 17$ см, $\beta = 32°$;

3) $a = 7$ см, $c = 3$ см, $\gamma = 27°$.

---

[1] У задачах №№ 116–124 прийнято позначення: a, b і c — сторони трикутника, α, β і γ — кути, протилежні відповідно сторонам a, b і с.

124.• Розв'яжіть трикутник за двома сторонами і кутом, який лежить проти однієї із даних сторін:

1) $a = 23$ см, $c = 30$ см, $\gamma = 102°$;

2) $a = 18$ см, $b = 25$ см, $\alpha = 36°$.

125.• У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 20$ см, $\angle A = 70°$. Знайдіть: 1) сторону AC; 2) медіану CM; 3) бісектрису AD; 4) радіус описаного кола трикутника ABC.

126.• Діагональ AC рівнобічної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) дорівнює 8 см, $\angle CAD = 38°$, $\angle BAD = 72°$. Знайдіть: 1) сторони трапеції; 2) радіус описаного кола трикутника ABC.

127.•• Основи трапеції дорівнюють 12 см і 16 см, а бічні сторони — 7 см і 9 см. Знайдіть кути трапеції.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

128. Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ перетинає його сторону AD у точці M, а продовження сторони CD за точку D — у точці K. Знайдіть довжину відрізка DK, якщо $AM = 8$ см, а периметр паралелограма дорівнює 50 см.

129. Периметр одного з двох подібних трикутників на 18 см менший від периметра другого трикутника, а найбільші сторони цих трикутників дорівнюють 5 см і 8 см. Знайдіть периметри даних трикутників.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

130. Точка M — середина сторони CD прямокутника $ABCD$ (рис. 26), $AB = 6$ см, $AD = 5$ см. Чому дорівнює площа трикутника ACM?

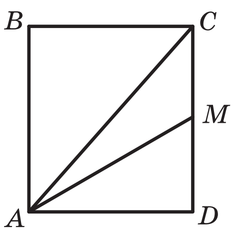


Рис. 26

131. На стороні AC трикутника ABC позначено точку D так, що $\angle ADB = \alpha$. Доведіть, що площа трикутника ABC

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha.$$

Поновіть у пам'яті зміст пункту 17 на с. 250.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Тригонометрія — наука про вимірювання трикутників

Ви знаєте, що стародавні мандрівники орієнтувалися за зірками і планетами. Вони могли досить точно визначити місцезнаходження корабля в океані або каравану в пустелі за розташуванням світил на небосхилі. При цьому одним з орієнтирів була висота, на яку піднімалося над горизонтом те або інше небесне світило в даній місцевості у даний момент часу.

Зрозуміло, що безпосередньо виміряти цю висоту неможливо. Тому вчені стали розробляти методи непрямих вимірювань. Тут суттєву роль відігравало розв’язування трикутника, дві вершини якого лежали на поверхні Землі, а третя була зіркою або планетою (рис. 27) — знайома вам задача № 94.

Для розв’язування подібних задач стародавнім астрономам необхідно було навчитися знаходити взаємозв’язки між елементами трикутника. Так виникла **тригонометрія** — наука, яка вивчає залежність між сторонами і кутами трикутника. Термін «тригонометрія» (від грецьких слів «тригоном» — трикутник і «метрео» — вимірювати) означає «вимірювання трикутників».

На рисунку 28 зображено центральний кут AOB, який дорівнює 2α. З прямокутного трикутника OMB маємо: $MB = OB \sin\alpha$. Отже, якщо в одиничному колі виміряти половини довжин хорд, на які спираються центральні кути з величинами $2°$, $4°$, $6°$, ..., $180°$, то таким чином ми обчислимо значення синусів кутів $1°$, $2°$, $3°$, ..., $90°$ відповідно.

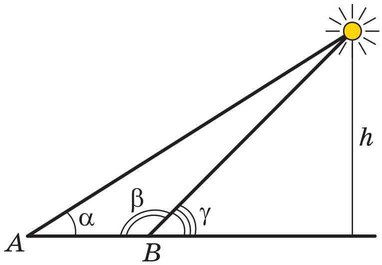


Рис. 27

Вимірюючи довжини півхорд, давньогрецький астроном Гіппарх (II ст. до н. е.) склав перші тригонометричні таблиці.

Поняття «синус» і «косинус» з'являються в тригонометричних трактатах індійських учених у IV–V ст. У X ст. арабські вчені оперували поняттям «тангенс», яке виникло з потреб гномоніки — учення про сонячний годинник (рис. 29).

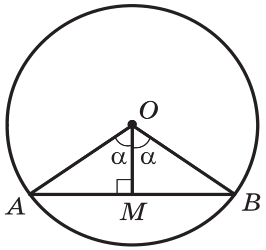


Рис. 28

Рис. 29

У Європі перший трактат з тригонометрії «П'ять книг про трикутники всіх видів», автором якого був німецький учений Регіомонтан (1436–1476), було опубліковано в 1533 р. Він же відкрив і теорему тангенсів:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}},\quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}},\quad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}},$$

де a, b і c — сторони трикутника, α, β і γ — кути трикутника, протилежні відповідно сторонам a, b і c.

Сучасного вигляду тригонометрія набула в роботах видатного математика Леонарда Ейлера.

Леонард Ейлер
(1707–1783)

Видатний математик, фізик, механік, астроном

5. Формули для знаходження площі трикутника

З курсу геометрії 8 класу ви дізналися, що площу S трикутника можна обчислити за формулами

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c,$$

де a, b і c — сторони трикутника, h_a, h_b, h_c — висоти, проведені до цих сторін відповідно.

Тепер у нас з'явилася можливість отримати ще кілька формул для знаходження площі трикутника.

Теорема 5.1. ***Площа трикутника дорівнює півдобутку двох його сторін і синуса кута між ними.***

Доведення. Доведемо, що площу S трикутника ABC можна обчислити за формулою

$$\boxed{S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,}$$

де a і b — сторони трикутника, γ — кут між ними.

Можливі три випадки:

1) кут γ — гострий (рис. 30);
2) кут γ — тупий (рис. 31);
3) кут γ — прямий.

На рисунках 30 і 31 проведемо висоту BD трикутника ABC. Тоді $S = \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2}BD \cdot b$.

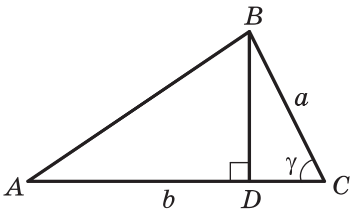


Рис. 30

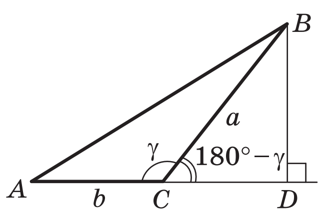


Рис. 31

З $\triangle BDC$ у першому випадку $BD = a\sin\gamma$, а у другому $BD = a\sin(180^\circ - \gamma) = a\sin\gamma$. Звідси для двох перших випадків маємо $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Якщо кут C — прямий, то $\sin\gamma = 1$. Для прямокутного трикутника ABC з катетами a і b маємо:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab\sin 90^\circ = \frac{1}{2}ab\sin\gamma. \blacktriangle$$

Теорема 5.2 (формула Герона[1]). ***Площу S трикутника ABC можна обчислити за формулою***

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}$$

де a, b, c — сторони трикутника, p — його півпериметр.

Доведення. Маємо:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Звідси $S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\gamma$.

За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Звідси $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Оскільки $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma)$, то маємо:

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2\left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(c^2-(a-b)^2\right)\left((a+b)^2-c^2\right) =$$

$$= \frac{c-a+b}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

[1] Герон Александрійський — давньогрецький учений, який жив у I ст. н. е.

$$= \frac{(a+b+c)-2a}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2b}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{2p-2a}{2} \cdot \frac{2p-2b}{2} \cdot \frac{2p-2c}{2} \cdot \frac{2p}{2} = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Звідси $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. ▲

Теорема 5.3. ***Площу S трикутника ABC можна обчислити за формулою***

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R},}$$

де a, b, c — сторони трикутника, R — радіус описаного кола трикутника ABC.

Доведення. ⊙ Маємо: $S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$.

Із леми пункту 3 випливає, що $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$. Тоді

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}. \ ▲$$

Зауважимо, що доведена теорема дає змогу знаходити радіус описаного кола трикутника за формулою

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

Теорема 5.4. ***Площа трикутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола.***

Доведення. ⊙ На рисунку 32 зображено трикутник ABC, у який вписано коло радіуса r. Доведемо, що

$$\boxed{S = pr,}$$

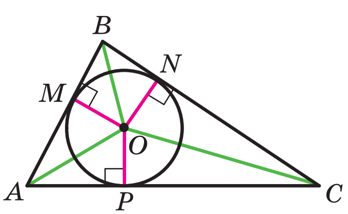


Рис. 32

де S — площа даного трикутника, p — його півпериметр.

Нехай точка O — центр вписаного кола, яке дотикається до сторін трикутника ABC у точках M, N і P. Площа трикутника ABC дорівнює сумі площ трикутників AOB, BOC, COA. Це зручно записати в такій формі:

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}.$$

Проведемо радіуси в точки дотику. Отримуємо: $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CA$. Звідси:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OM \cdot AB = \frac{1}{2} r \cdot AB;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} ON \cdot BC = \frac{1}{2} r \cdot BC;$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2} OP \cdot AC = \frac{1}{2} r \cdot AC.$$

Отже, $S = \frac{1}{2} r \cdot AB + \frac{1}{2} r \cdot BC + \frac{1}{2} r \cdot AC = r \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = pr.$ ▲

Вищезазначене узагальнює така теорема.

Теорема 5.5. ***Площа описаного многокутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола.***

Доведіть цю теорему самостійно (рис. 33).

Зауважимо, що теорема 5.5 дає змогу знаходити радіус вписаного кола многокутника за формулою

$$\boxed{r = \frac{S}{p}}$$

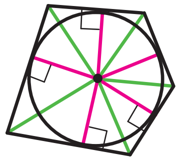


Рис. 33

Задача 1. *Доведіть, що площу S паралелограма можна обчислити за формулою*

$$S = ab \sin \alpha,$$

де a і b — сусідні сторони паралелограма, α — кут між ними.

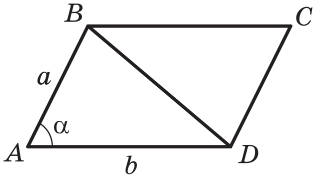


Рис. 34

Розв'язання. Розглянемо паралелограм $ABCD$, у якому $AB = a$, $AD = b$, $\angle BAD = \alpha$ (рис. 34). Проведемо діагональ BD. Оскільки $\Delta ABD = \Delta CBD$, то запишемо:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \alpha = ab \sin \alpha.$$

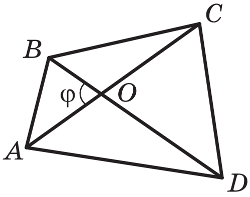


Рис. 35

Задача 2. *Доведіть, що площа опуклого чотирикутника дорівнює півдобутку його діагоналей і синуса кута між ними.*

Розв’язання. Нехай кут між діагоналями AC і BD чотирикутника $ABCD$ дорівнює φ. На рисунку 35 $\angle AOB = \varphi$. Тоді $\angle BOC = \angle AOD = 180° - \varphi$ і $\angle COD = \varphi$. Маємо:

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= \frac{1}{2} OB \cdot OA \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin(180° - \varphi) +$$

$$+ \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} OD \cdot OA \cdot \sin(180° - \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} OB(OA + OC) \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} OD(OC + OA) \cdot \sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} OB \cdot AC \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} OD \cdot AC \cdot \sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} AC(OB + OD) \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\varphi.$$

Приклад. Сторони трикутника дорівнюють 17 см, 65 см і 80 см. Знайдіть найменшу висоту трикутника, радіуси його вписаного і описаного кіл.

Розв’язання. Нехай $a = 17$ см, $b = 65$ см, $c = 80$ см.

Півпериметр трикутника $p = \frac{17 + 65 + 80}{2} = 81$ (см), його площа

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \sqrt{81(81 - 17)(81 - 65)(81 - 80)} =$$

$$= \sqrt{81 \cdot 64 \cdot 16} = 9 \cdot 8 \cdot 4 = 288 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Найменшою висотою трикутника є висота h, проведена до його найбільшої сторони c.

Оскільки $S = \frac{1}{2}ch$, то $h = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 288}{80} = 7{,}2$ (см).

Радіус вписаного кола $r = \frac{S}{p} = \frac{288}{81} = \frac{32}{9}$ (см).

Радіус описаного кола

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 80}{4 \cdot 288} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 5}{4 \cdot 18} = \frac{5525}{72} \text{ (см).}$$

Відповідь: 7,2 см, $\frac{32}{9}$ см, $\frac{5525}{72}$ см.

1. Як можна знайти площу трикутника, якщо відомо дві його сторони і кут між ними?
2. Запишіть формулу Герона для обчислення площі трикутника.
3. Як можна знайти площу трикутника, якщо відомо три його сторони і радіус описаного кола?
4. Як можна знайти площу трикутника, якщо відомо три його сторони і радіус вписаного кола?
5. Як можна знайти радіус описаного кола трикутника, якщо відомо площу трикутника і його сторони?
6. Як можна знайти радіус вписаного кола трикутника, якщо відомо площу трикутника і його сторони?
7. Чому дорівнює площа описаного многокутника?

ВПРАВИ

132.° Знайдіть площу трикутника ABC, якщо:

1) $AB = 12$ см, $AC = 9$ см, $\angle A = 30°$;

2) $AC = 3$ см, $BC = 6\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135°$.

133.° Знайдіть площу трикутника DEF, якщо:

1) $DE = 7$ см, $DF = 8$ см, $\angle D = 60°$;

2) $DE = 10$ см, $EF = 6$ см, $\angle E = 150°$.

134.° Площа трикутника MKN дорівнює 75 см². Знайдіть сторону MK, якщо $KN = 15$ см, $\angle K = 30°$.

135.° Знайдіть кут між даними сторонами трикутника ABC, якщо:

1) $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, площа трикутника дорівнює $30\sqrt{3}$ см²;

2) $AB = 14$ см, $AC = 8$ см, площа трикутника дорівнює 56 см^2.

136.° Площа трикутника ABC дорівнює 18 см^2, $AC = 8$ см, $BC = 9$ см. Знайдіть кут C.

137.° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника з бічною стороною 16 см і кутом $15°$ при основі.

138.° Знайдіть площу трикутника зі сторонами: 1) 13 см, 14 см, 15 см; 2) 2 см, 3 см, 4 см.

139.° Знайдіть площу трикутника зі сторонами: 1) 9 см, 10 см, 17 см; 2) 4 см, 5 см, 7 см.

140.° Знайдіть найменшу висоту трикутника зі сторонами 13 см, 20 см і 21 см.

141.° Знайдіть найбільшу висоту трикутника зі сторонами 11 см, 25 см і 30 см.

142.° Периметр трикутника дорівнює 32 см, а радіус вписаного кола — 1,5 см. Знайдіть площу трикутника.

143.° Площа трикутника дорівнює 84 см^2, а його периметр — 72 см. Знайдіть радіус вписаного кола трикутника.

144.° Знайдіть радіуси вписаного та описаного кіл трикутника зі сторонами:

1) 5 см, 5 см і 6 см; 2) 25 см, 29 см і 36 см.

145.° Знайдіть радіуси вписаного та описаного кіл трикутника зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см.

146.° Знайдіть площу паралелограма за його сторонами a і b та кутом α між ними, якщо:

1) $a = 5\sqrt{2}$ см, $b = 9$ см, $\alpha = 45°$;

2) $a = 10$ см, $b = 18$ см, $\alpha = 150°$.

147.° Чому дорівнює площа паралелограма, сторони якого дорівнюють 7 см і 12 см, а один із кутів — $120°$?

148.° Знайдіть площу ромба зі стороною $9\sqrt{3}$ см і кутом $60°$.

149.° Діагоналі опуклого чотирикутника дорівнюють 8 см і 12 см, а кут між ними — $30°$. Знайдіть площу чотирикутника.

150.° Знайдіть площу опуклого чотирикутника, діагоналі якого дорівнюють $3\sqrt{3}$ см і 4 см, а кут між ними — $60°$.

151.° Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, площа якого дорівнює 36 см^2, а кут при вершині — 30°.

152.• Який трикутник із двома даними сторонами має найбільшу площу?

153.• Чи може площа трикутника зі сторонами 4 см і 6 см дорівнювати: 1) 6 см^2; 2) 14 см^2; 3) 12 см^2?

154.• Дві сусідні сторони паралелограма відповідно дорівнюють двом сусіднім сторонам прямокутника. Чому дорівнює гострий кут паралелограма, якщо його площа вдвічі менша від площі прямокутника?

155.• Знайдіть відношення площ S_1 і S_2 трикутників, зображених на рисунку 36 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

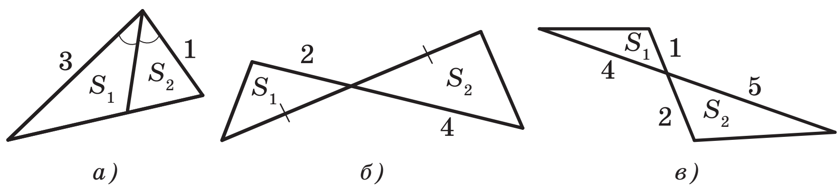


Рис. 36

156.• Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC, площа трикутника ABD дорівнює 12 см^2, а трикутника ACD — 20 см^2. Знайдіть відношення сторони AB до сторони AC.

157.• Знайдіть площу трикутника, сторона якого дорівнює a, а прилеглі до неї кути дорівнюють β і γ.

158.• Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R, а два кути дорівнюють α і β. Знайдіть площу трикутника.

159.• У трикутнику ABC відомо, що $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Знайдіть площу трикутника.

160.• У трикутнику ABC кут A дорівнює α, а висоти BD і CE дорівнюють відповідно h_1 і h_2. Знайдіть площу трикутника ABC.

161.• Відрізок BM — висота трикутника ABC, $BM = h$, $\angle A = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Знайдіть площу трикутника ABC.

162.• У трикутник зі сторонами 17 см, 25 см і 28 см вписано коло, центр якого сполучено з вершинами трикутника. Знайдіть площі трикутників, які при цьому утворилися.

163.•• Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC, $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, $\angle BAC = 120°$. Знайдіть бісектрису AD.

164.•• Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 50 см, а бічні сторони — 13 см і 37 см.

165.•• Основи трапеції дорівнюють 4 см і 5 см, а діагоналі — 7 см і 8 см. Знайдіть площу трапеції.

166.•• Відрізки BM і CK — висоти гострокутного трикутника ABC, $\angle A = 45°$. Знайдіть відношення площ трикутників AMK і ABC.

167.•• Сторони трикутника дорівнюють 39 см, 41 см і 50 см. Знайдіть радіус кола, центр якого належить більшій стороні трикутника і яке дотикається до двох інших сторін.

168.•• Вершини трикутника сполучено з центром вписаного в нього кола. Проведені відрізки розбивають даний трикутник на трикутники, площі яких дорівнюють 26 см^2, 28 см^2 і 30 см^2. Знайдіть сторони даного трикутника.

169.•• Доведіть, що $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$, де h_1, h_2 і h_3 — висоти трикутника, r — радіус вписаного кола.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

170. Перпендикуляр, проведений із вершини прямокутника до його діагоналі, ділить його кут у відношенні 4 : 5. Визначте кут між цим перпендикуляром і другою діагоналлю.

171. Середня лінія MK трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) дорівнює 56 см. Через середину M сторони AB проведено пряму, яка паралельна стороні CD і перетинає основу AD у точці E так, що $AE : ED = 5 : 8$. Знайдіть основи трапеції.

172. Відрізок CD — бісектриса трикутника ABC. Через точку D проведено пряму, яка паралельна прямій AC і перетинає сторону BC у точці E. Знайдіть DE, якщо $AC = 16$ см, $BC = 24$ см.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

173. Знайдіть суму кутів опуклого семикутника.

174. Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює: 1) 1080°; 2) 1200°?

175. Чи існує многокутник, кожний кут якого дорівнює: 1) 72°; 2) 171°?

176. Чи є правильним твердження (відповідь обґрунтуйте):

1) якщо всі сторони многокутника, вписаного в коло, рівні, то й усі його кути теж рівні;

2) якщо всі кути многокутника, вписаного в коло, рівні, то й усі його сторони теж рівні;

3) якщо всі сторони многокутника, описаного навколо кола, рівні, то й усі його кути теж рівні;

4) якщо всі кути многокутника, описаного навколо кола, рівні, то й усі його сторони теж рівні?

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Зовнівписане коло трикутника

Проведемо бісектриси двох зовнішніх кутів із вершинами A і C трикутника ABC (рис. 37). Нехай O — точка перетину цих бісектрис. Ця точка рівновіддалена від прямих AB, BC і AC.

Проведемо три перпендикуляри: $OM \perp AB$, $OK \perp AC$, $ON \perp BC$. Зрозуміло, що $OM = OK = ON$. Отже, існує коло з центром у точці O, яке дотикається до сторони трикутника і продовжень двох інших його сторін. Таке коло називають **зовнівписаним** (рис. 37).

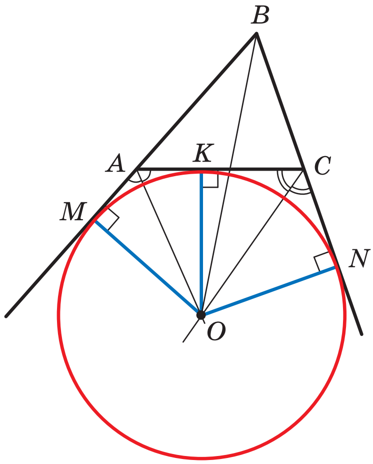


Рис. 37

Оскільки $OM = ON$, то точка O належить бісектрисі кута ABC.

Очевидно, що будь-який трикутник має три зовнівписаних кола. На рисунку 38 їх центри позначено O_A, O_B, O_C. Радіуси цих кіл позначимо відповідно r_a, r_b, r_c.

За властивістю дотичних, проведених до кола через одну точку, маємо: $CK = CN$, $AK = AM$ (рис. 37). Тоді $AC = CN + AM$. Отже, периметр трикутника ABC дорівнює сумі $BM + BN$. Але $BM = BN$. Тоді $BM = BN = p$, де p — півпериметр трикутника ABC.

Маємо:

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OCB} - S_{OAC} =$$

$$= \frac{1}{2} OM \cdot AB + \frac{1}{2} ON \cdot BC - \frac{1}{2} OK \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{2} r_b (c + a - b) = r_b \cdot \frac{a + b + c - 2b}{2} = r_b \cdot \frac{2p - 2b}{2} = r_b (p - b).$$

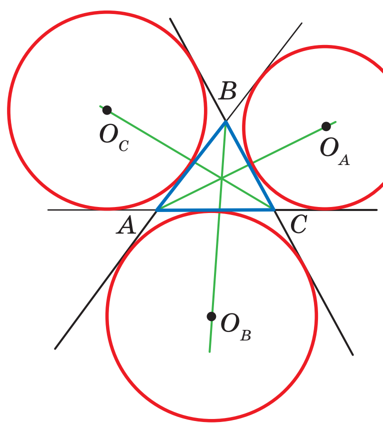


Рис. 38

Звідси $r_b = \frac{S}{p - b}$, де S — площа трикутника ABC.

Аналогічно можна показати, що $r_a = \frac{S}{p - a}$, $r_c = \frac{S}{p - c}$.

ВПРАВИ

1. Доведіть, що $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$, де r — радіус вписаного кола трикутника ABC.

2. Доведіть, що площа прямокутного трикутника $S = r_c \cdot r$, де r_c — радіус зовнівписаного кола, яке дотикається до гіпотенузи трикутника, r — радіус вписаного кола даного трикутника.

3. У рівносторонній трикутник зі стороною a вписано коло. До кола проведено дотичну так, що її відрізок всередині трикутника дорівнює b. Знайдіть площу трикутника, який ця дотична відтинає від рівностороннього трикутника.

4. У чотирикутнику $ABCD$ діагональ BD перпендикулярна до сторони AD, $\angle ADC = 135°$, $\angle BAD = \angle BCD = 60°$. Доведіть, що діагональ AC є бісектрисою кута BAD.

Вказівка. Доведіть, що точка C — центр зовнівписаного кола трикутника ABD.

5. У трикутнику ABC кут B дорівнює $120°$. Відрізки AN, CF і BK є бісектрисами трикутника ABC. Доведіть, що кут NKF дорівнює $90°$.

Вказівка. На продовженні сторони AB за точку B позначимо точку M. Тоді $\angle MBC = \angle KBC = 60°$, тобто BC — бісектриса зовнішнього кута MBK трикутника ABK. Звідси випливає, що точка N — центр зовнівписаного кола трикутника ABK. Аналогічно можна довести, що точка F — центр зовнівписаного кола трикутника BCK.

6. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 1 см. На сторонах AB і BC позначили точки M і N відповідно так, що периметр трикутника MBN дорівнює 2 см. Знайдіть величину кута MDN.

Вказівка. Доведіть, що точка D — центр зовнівписаного кола трикутника MBN.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 1

1. Яка з рівностей є правильною?

А) $\cos(180° - \alpha) = \sin\alpha$; В) $\sin(180° - \alpha) = \cos\alpha$;
Б) $\cos(180° - \alpha) = \cos\alpha$; Г) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

2. Яка з нерівностей є правильною?

А) $\sin 100° \cos 110° > 0$; В) $\sin 100° \cos 110° < 0$;
Б) $\sin 100° \cos 10° < 0$; Г) $\sin 100° \cos 90° > 0$.

3. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 3 см і 8 см, а кут між ними дорівнює 120°.

А) $\sqrt{97}$ см; Б) 7 см; В) 9 см; Г) $\sqrt{32}$ см.

4. Який вид кута, що лежить проти більшої сторони трикутника зі сторонами 4 см, 7 см і 9 см?

А) гострий; В) прямий;
Б) тупий; Г) не можна встановити.

5. Кут між двома сторонами трикутника, одна з яких на 10 см більша за другу, дорівнює 60°, а третя сторона дорівнює 14 см. Яка довжина найбільшої сторони трикутника?

А) 16 см; Б) 14 см; В) 18 см; Г) 15 см.

6. Діагоналі паралелограма дорівнюють 17 см і 19 см, а його сторони відносяться як 2 : 3. Чому дорівнює периметр паралелограма?

А) 25 см; Б) 30 см; В) 40 см; Г) 50 см.

7. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $\angle C = 30°$, $\angle A = 45°$. Знайдіть сторону BC.

А) $8\sqrt{2}$ см; Б) $4\sqrt{2}$ см; В) $16\sqrt{2}$ см; Г) $12\sqrt{2}$ см.

8. Знайдіть відношення $AC : BC$ сторін трикутника ABC, якщо $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$.

А) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Б) $\sqrt{3}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Г) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

9. У трикутнику ABC $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135°$. Знайдіть діаметр кола, описаного навколо трикутника.

А) 4 см; Б) 8 см; В) 16 см; Г) 2 см.

10. Якого найбільшого значення може набувати площа трикутника зі сторонами 8 см і 12 см?

А) 96 $см^2$; В) 24 $см^2$;
Б) 48 $см^2$; Г) не можна встановити.

11. Знайдіть суму довжин радіусів вписаного і описаного кіл трикутника зі сторонами 25 см, 33 см і 52 см.

А) 36 см; Б) 30 см; В) 32,5 см; Г) 38,5 см.

12. Дві сторони трикутника дорівнюють 11 см і 23 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 10 см. Знайдіть невідому сторону трикутника.

А) 15 см; Б) 30 см; В) 25 см; Г) 20 см.

ПІДСУМКИ

У ЦЬОМУ ПАРАГРАФІ:

- було введено такі поняття:
  - одиничне півколо;
  - синус, косинус, тангенс кута від 0° до 180°;
- ви дізналися, що означає розв'язати трикутник;
- ви навчилися розв'язувати трикутники;
- ви вивчили:
  - деякі властивості тригонометричних функцій;
  - теорему косинусів;
  - теорему синусів;
  - формули для знаходження радіуса описаного кола трикутника;
  - формули для знаходження площі трикутника;
  - формулу для знаходження радіуса вписаного кола трикутника.

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ §2

У цьому параграфі ви дізнаєтесь, які многокутники називають правильними.

Вивчите властивості правильних многокутників. Навчитеся за допомогою циркуля і лінійки будувати деякі їх види.

Навчитеся знаходити радіуси вписаного і описаного кіл правильного многокутника, довжину дуги кола, площу частин круга.

6. Правильні многокутники та їх властивості

Означення. Многокутник називають правильним, якщо у нього всі сторони рівні і всі кути рівні.

З деякими правильними многокутниками ви вже знайомі: рівносторонній трикутник — це правильний трикутник, квадрат — це правильний чотирикутник. На рисунку 39 зображено правильні п'ятикутник і восьмикутник.

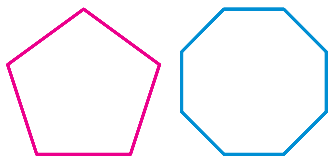


Рис. 39

Ознайомимося з деякими властивостями, що притаманні всім правильним n-кутникам.

Теорема 6.1. ***Правильний многокутник є опуклим многокутником.***

Із доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися на с. 61.

Кожний кут правильного n-кутника дорівнює $\frac{180°(n-2)}{n}$. Дійсно, оскільки сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° (n - 2)$ і всі вони рівні, то кожний із них дорівнює $\frac{180°(n-2)}{n}$.

У правильному трикутнику є точка, рівновіддалена від усіх його вершин і від усіх його сторін. Це точка перетину бісектрис правильного трикутника. Точці перетину діагоналей квадрата теж притаманна аналогічна властивість. Те, що в будь-якому правильному многокутнику є точка, рівновіддалена від усіх його вершин і від усіх його сторін, підтверджує така теорема.

Теорема 6.2. ***Будь-який правильний многокутник є одночасно вписаним і описаним, причому центри описаного і вписаного кіл збігаються.***

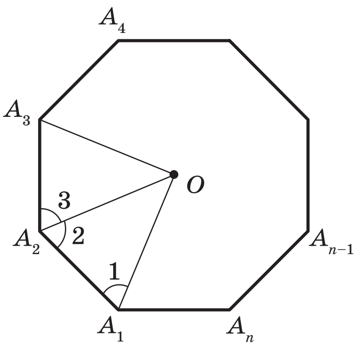


Рис. 40

Доведення. На рисунку 40 зображено правильний n-кутник $A_1A_2A_3...A_n$. Проведемо бісектриси кутів A_1 і A_2. Нехай O — точка їх перетину. З'єднаємо точки O і A_3. Оскільки в трикутниках OA_1A_2 і OA_2A_3 $\angle 2 = \angle 3$, $A_1A_2 = A_2A_3$ і OA_2 — спільна сторона, то ці трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників. Крім того, кути 1 і 2 рівні як половини рівних кутів. Звідси трикутник OA_1A_2 — рівнобедрений, а отже, рівнобедреним є трикутник OA_2A_3. Тому $OA_1 = OA_2 = OA_3$.

З'єднуючи точку O з вершинами A_4, A_5, ..., A_{n-1}, A_n, аналогічно можна показати, що $OA_3 = OA_4 = ... = OA_{n-1} = OA_n$.

Таким чином, для многокутника $A_1A_2A_3...A_n$ існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин. Це точка O — центр описаного кола.

Оскільки рівнобедрені трикутники OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 рівні, то рівні і їх висоти, проведені з вершини O. Звідси робимо висновок: точка O рівновіддалена від усіх сторін многокутника. Отже, точка O — центр вписаного кола. ▲

Точку, яка є центром описаного і вписаного кіл правильного многокутника, називають **центром правильного многокутника**.

На рисунку 41 зображено фрагмент правильного n-кутника з центром O і стороною AB, довжину якої позначимо a_n. Кут AOB називають **центральним кутом правильного многокутника**.

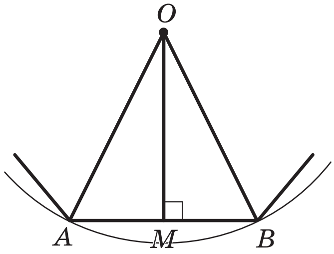


Рис. 41

Зрозуміло, що $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$.

У рівнобедреному трикутнику AOB проведемо висоту OM. Тоді $\angle AOM = \angle BOM = \frac{180^\circ}{n}$, $AM = MB = \frac{a_n}{2}$. З $\Delta\ OMB$

$$OB = \frac{MB}{\sin\frac{180^\circ}{n}} = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}} \text{ і } OM = \frac{MB}{\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}} = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

Відрізки OB і OM — радіуси описаного і вписаного кіл правильного n-кутника. Якщо їх довжини позначити R_n і r_n відповідно, то отримані результати можна записати у вигляді формул:

$$\boxed{R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}}$$

$$\boxed{r_n = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}}$$

Підставивши у ці формули замість n числа 3, 4, 6, отримаємо формули для знаходження радіусів описаного і вписаного кіл для правильних трикутника, чотирикутника і шестикутника зі стороною a:

Кількість сторін правильного n-кутника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радіус описаного кола	$R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радіус вписаного кола	$r_3 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \frac{a}{2}$	$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

З отриманих результатів випливає, що сторона правильного шестикутника дорівнює радіусу його описаного кола. Звідси отримуємо простий алгоритм побудови правильного шестикутника: від довільної точки M кола потрібно послідовно відкладати хорди, які дорівнюють радіусу (рис. 42). Таким чином отримуємо вершини правильного шестикутника.

Сполучивши через одну вершини правильного шестикутника, отримаємо правильний трикутник (рис. 43).

Для побудови правильного чотирикутника достатньо в колі провести два перпендикулярні діаметри AC і BD (рис. 44). Тоді чотирикутник $ABCD$ — квадрат (доведіть це самостійно).

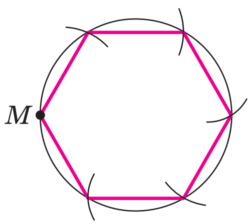


Рис. 42

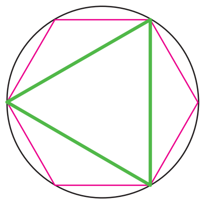


Рис. 43

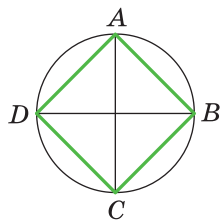


Рис. 44

Якщо вже побудовано правильний n-кутник, то легко побудувати правильний $2n$-кутник. Для цього потрібно знайти середини всіх сторін n-кутника і провести радіуси описаного кола через отримані точки. Тоді кінці радіусів і вершини даного n-кутника будуть вершинами правильного $2n$-кутника. На рисунках 45 і 46 показано побудову правильних 8-кутника і 12-кутника.

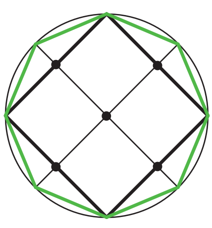


Рис. 45

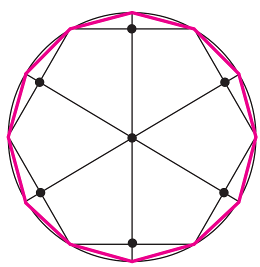


Рис. 46

Приклад 1. Чи існує правильний многокутник, кут якого дорівнює: 1) 177°; 2) 155°? У разі позитивної відповіді вкажіть вид многокутника.

Розв'язання

1) Нехай n — кількість сторін шуканого правильного многокутника. З одного боку, сума його кутів дорівнює $180° (n - 2)$. З іншого боку, ця сума дорівнює $177°n$. Отже,

$180° (n - 2) = 177°n$; $180°n - 360° = 177°n$; $n = 120$.

Відповідь: існує, це — стодвадцятикутник.

2) Маємо: $180° (n - 2) = 155°n$; $25°n = 360°$; $n = 14{,}4$, що неможливо, оскільки n має бути натуральним числом.

Відповідь: не існує.

Приклад 2. У коло вписано правильний трикутник зі стороною 18 см. Знайдіть сторону правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

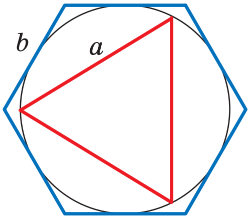


Рис. 47

Розв'язання. Радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, обчислюється за формулою $R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, де a — сторона трикутника (рис. 47). Отже, $R_3 = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$ (см).

За умовою радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, дорівнює радіусу кола, описаного навколо правильного трикутника, тобто $r_6 = R_3 = 6\sqrt{3}$ см. Оскільки $r_6 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, де b — сторона правильного шестикутника, то $b = \frac{2r_6}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12$ (см).

Відповідь: 12 см.

1. Який многокутник називають правильним?
2. Яку іншу назву має правильний трикутник?
3. Яку іншу назву має правильний чотирикутник?
4. Навколо якого правильного многокутника можна описати коло?

5. У який правильний многокутник можна вписати коло?
6. Як розташовані відносно один одного центри вписаного і описаного кіл правильного многокутника?
7. Що називають центром правильного многокутника?
8. Запишіть формули радіусів вписаного і описаного кіл правильного n-кутника, трикутника, чотирикутника, шестикутника.
9. Опишіть побудову правильного шестикутника.
10. Опишіть побудову правильного чотирикутника.
11. Як, маючи побудований правильний n-кутник, можна побудувати правильний $2n$-кутник?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

177.° Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3 см. Побудуйте вписаний у це коло:

1) правильний шестикутник;
2) правильний трикутник;
3) правильний дванадцятикутник.

178.° Накресліть коло, радіус якого дорівнює 2,5 см. Побудуйте вписаний у це коло: 1) правильний чотирикутник; 2) правильний восьмикутник.

ВПРАВИ

179.° Знайдіть кути правильного n-кутника, якщо: 1) $n = 6$; 2) $n = 9$; 3) $n = 15$.

180.° Знайдіть кути правильного: 1) восьмикутника; 2) десятикутника; 3) двадцятичотирикутника.

181.° Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого дорівнює: 1) 60°; 2) 160°; 3) 171°?

182.° Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого дорівнює: 1) 90°; 2) 108°; 3) 175°?

183.° Чи існує правильний многокутник, кут якого дорівнює: 1) 140°; 2) 130°?

184.° Скільки сторін має правильний многокутник, якщо кут, суміжний з кутом многокутника, становить $\frac{1}{9}$ кута многокутника?

185. Визначте кількість сторін правильного многокутника, якщо його кут на 168° більший за суміжний із ним кут.

186.° Скільки сторін має правильний вписаний многокутник, якщо градусна міра дуги описаного кола, яку стягує сторона многокутника, дорівнює: 1) 90°; 2) 45°; 3) 24°?

187.° Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, центральний кут якого дорівнює: 1) 120°; 2) 60°; 3) 72°.

188.° Нехай a_3 — сторона правильного трикутника, R і r — відповідно радіуси описаного і вписаного його кіл. Заповніть таблицю (розміри дано в сантиметрах):

a_3	R	r
$6\sqrt{3}$		
	$4\sqrt{3}$	
		2

189.° Нехай a_4 — сторона квадрата, R і r — відповідно радіуси описаного і вписаного його кіл. Заповніть таблицю (розміри дано в сантиметрах):

a_4	R	r
8		
	4	
		$\sqrt{2}$

190.° Висота правильного трикутника дорівнює 15 см. Чому дорівнює радіус: 1) описаного кола; 2) вписаного кола?

191.° Діагональ квадрата дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Чому дорівнює радіус: 1) описаного кола; 2) вписаного кола?

192.° Радіус кола дорівнює 12 см. Знайдіть сторону вписаного в це коло правильного: 1) шестикутника; 2) дванадцятикутника.

193.° Радіус кола дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону описаного навколо цього кола правильного шестикутника.

194.° Доведіть, що радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, вдвічі більший за радіус кола, яке вписане в цей трикутник.

195.° Радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, на 4 см більший за радіус вписаного кола. Знайдіть радіуси вписаного і описаного кіл та сторону трикутника.

196.° Сторона правильного многокутника дорівнює a, радіус описаного кола дорівнює R. Знайдіть радіус вписаного кола.

197.° Радіуси вписаного і описаного кіл правильного многокутника дорівнюють відповідно r і R. Знайдіть сторону многокутника.

198.° Сторона правильного многокутника дорівнює a, радіус вписаного кола дорівнює r. Знайдіть радіус описаного кола.

199.° Навколо кола описано правильний шестикутник зі стороною $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в це коло.

200.° У коло вписано квадрат зі стороною $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть сторону правильного трикутника, описаного навколо цього кола.

201.° Діаметр круга дорівнює 16 см. Чи можна з нього вирізати квадрат зі стороною 12 см?

202.° Яким має бути найменший діаметр круглої колоди, щоб із неї можна було виготовити брус, поперечним перерізом якого є правильний трикутник зі стороною 15 см?

203.° Яким має бути найменший діаметр круглої колоди, щоб із неї можна було виготовити брус, поперечним перерізом якого є квадрат зі стороною 14 см?

204.• Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого на 36° більший за його центральний кут?

205.• Кут між радіусами вписаного кола правильного многокутника, проведеними в точки дотику цього кола із сусідніми сторонами многокутника, дорівнює 20°. Знайдіть кількість сторін многокутника.

206.• Доведіть, що всі діагоналі правильного п'ятикутника рівні.

207.• Доведіть, що кожна діагональ правильного п'ятикутника паралельна одній із його сторін.

208.• Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є стороною правильного трикутника, вписаного в одне коло, і стороною квадрата, вписаного в друге коло. Довжина цієї хорди дорівнює a. Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо вони лежать: 1) по різні боки від хорди; 2) по один бік від хорди.

209.• Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є стороною правильного трикутника, вписаного в одне коло, і стороною правильного шестикутника, вписаного в друге коло. Довжина цієї хорди дорівнює a. Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо вони лежать: 1) по різні боки від хорди; 2) по один бік від хорди.

210.• У коло вписано і навколо нього описано правильні трикутники. Знайдіть відношення сторін цих трикутників.

211.• У коло вписано і навколо нього описано правильні шестикутники. Знайдіть відношення сторін цих шестикутників.

212.• Доведіть, що сторона правильного восьмикутника дорівнює $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, де R — радіус описаного кола.

213.• Доведіть, що сторона правильного дванадцятикутника дорівнює $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, де R — радіус описаного кола.

214.• Який розмір отвору має бути в ключа для шестигранної гайки, основи якої мають форму правильного шестикутника (рис. 48), якщо ширина грані гайки дорівнює 25 мм, а зазор між гранями гайки і ключа — 0,5 мм?

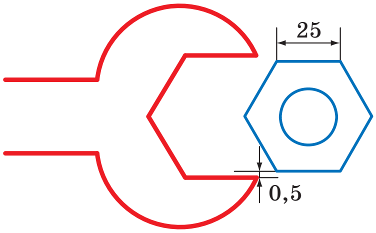


Рис. 48

215.• Знайдіть площу правильного восьмикутника, якщо радіус описаного навколо нього кола дорівнює R.

216.• Знайдіть діагоналі та площу правильного шестикутника, сторона якого дорівнює a.

217.•• Кути квадрата зі стороною 6 см зрізали так, що отримали правильний восьмикутник. Знайдіть сторону утвореного восьмикутника.

218.•• Кути правильного трикутника зі стороною 24 см зрізали так, що отримали правильний шестикутник. Знайдіть сторону утвореного шестикутника.

219.•• Знайдіть діагоналі правильного восьмикутника, сторона якого дорівнює a.

220.•• У правильному дванадцятикутнику, довжина сторони якого дорівнює a, послідовно сполучили середини шести сторін, узятих через одну. Знайдіть сторону правильного шестикутника, який утворився при цьому.

221.•• У правильному восьмикутнику, довжина сторони якого дорівнює a, послідовно сполучили середини чотирьох сторін, узятих через одну. Знайдіть сторону квадрата, який утворився при цьому.

222.* Форму яких рівних правильних многокутників можуть мати дощечки паркету, щоб ними можна було вистелити підлогу?

223.* Нарисовано правильний шестикутник, довжина сторони якого дорівнює 1. Користуючись тільки лінійкою, побудуйте відрізок завдовжки $\sqrt{7}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

224. Коло поділено на 5 рівних дуг: $\cup AB = \cup BC = \cup CD = \cup DE = \cup AE$. Знайдіть: 1) $\angle BAC$; 2) $\angle BAD$; 3) $\angle BAE$; 4) $\angle CAD$; 5) $\angle DAE$.

225. На одній стороні кута з вершиною в точці A позначили точки B і C (точка B лежить між точками A і C), а на другій — точки D і E (точка D лежить між точками A і E), причому $AB = 28$ см, $BC = 8$ см, $AD = 24$ см, $AE = 42$ см, $BE = 21$ см. Знайдіть CD.

226. Основа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 24 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 13 см. Знайдіть площу трикутника.

227. Через точку A до кола проведено дві дотичні. Відстань від точки A до точки дотику дорівнює 12 см, а відстань між точками дотику — 14,4 см. Знайдіть радіус кола.

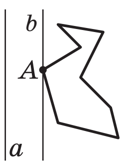
КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Про побудову правильних n-кутників

Доведемо, що будь-який правильний n-кутник є опуклим многокутником. Для цього достатньо показати, що в будь-якому многокутнику є хоча б один кут, менший від 180°. Тоді з того, що в правильному n-кутнику всі кути рівні, випливатиме, що всі вони менші від 180°, тобто многокутник буде опуклим.

Розглянемо довільний многокутник і пряму a, яка не має з ним спільних точок (див. рисунок). Із кожної вершини многокутника опустимо перпендикуляр на пряму a.

Порівнявши довжини цих перпендикулярів, ми зможемо обрати вершину многокутника, яка найменш віддалена від прямої a (якщо таких вершин кілька, то оберемо будь-яку з них). Нехай цю властивість має вершина A. Через точку A проведемо пряму b, паралельну прямій a. Тоді кут A многокутника лежить в одній півплощині відносно прямої b. Отже, $\angle A < 180°$.



Ви вмієте за допомогою циркуля та лінійки будувати правильний 4-кутник, а отже, і 8-кутник, 16-кутник, 32-кутник, тобто будь-який 2^n-кутник (n — натуральне, $n > 1$). Уміння побудувати правильний трикутник дозволяє побудувати такий ланцюжок із правильних многокутників: 6-кутник, 12-кутник, 24-кутник і т. д., тобто будь-який $3 \cdot 2^n$-кутник (n — натуральне).

Задача побудови правильних многокутників за допомогою циркуля та лінійки вивчалася ще давньогрецькими геометрами. Зокрема, крім зазначених вище многокутників вони вміли будувати правильні 5-кутник і 15-кутник, що є досить непростою справою.

Стародавні вчені, які вміли будувати будь-який із правильних n-кутників, де $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$, намагалися розв'язати цю задачу і для $n = 7, 9$. Їм це не вдалося. Узагалі, більше двох тисяч років ніхто не міг вирішити цю проблему. Лише в 1796 р. великий німецький математик Карл Фрідріх Гаусс (1777–1855) зміг довести, що за допомогою циркуля та лінійки побудувати правильні 7-кутник і 9-кутник неможливо. У 1801 р. Гаусс показав, що циркулем і лінійкою можна побудувати правильний n-кутник тоді і тільки тоді, коли $n = 2^k$, де $k \in N$, $k > 1$, або $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$, де k — ціле невід'ємне число, p_1, p_2, ..., p_s — різні прості числа виду $2^{2^m} + 1$, які називають простими числами Ферма[1]. Зараз відомо лише п'ять простих чисел Ферма: 3, 5, 17, 257, 65537.

Гауссу вдалося побудувати правильний 17-кутник. Він надавав цьому відкриттю настільки великого значення, що заповів увіковічити 17-кутник на своєму надгробку. На могильній плиті Гаусса цього рисунка немає, проте сам пам'ятник стоїть на сімнадцятикутному постаменті.

7. Довжина кола. Площа круга

На рисунку 49 зображено правильні 4-кутник, 8-кутник і 16-кутник, вписані в коло.

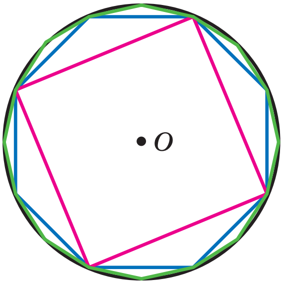


Рис. 49

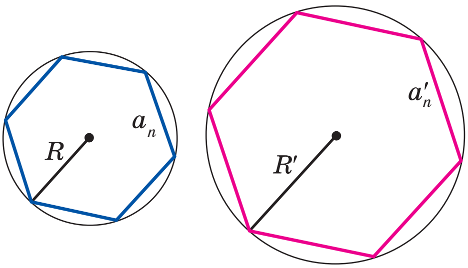


Рис. 50

[1] П'єр Ферма (1601–1665) — французький математик, один з фундаторів теорії чисел.

Ми бачимо, що при збільшенні кількості сторін правильного n-кутника його периметр P_n усе менше й менше відрізняється від довжини C описаного кола.

Так, для нашого прикладу можна записати:

$$C - P_4 > C - P_8 > C - P_{16} \text{ і т. д.}$$

При необмеженому збільшенні кількості сторін правильного многокутника його периметр як завгодно мало відрізняється від довжини кола. Це означає, що різницю $C - P_n$ можна зробити меншою від, наприклад, 10^{-6}, 10^{-9} і взагалі меншою від будь-якого додатного числа.

Розглянемо два правильні n-кутники зі сторонами a_n і a'_n та радіусами описаних кіл R і R' відповідно (рис. 50). Тоді їх периметри P_n і P'_n обчислюють за формулами:

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n},$$

$$P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Звідси

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (*)$$

Ця рівність справедлива при будь-якому значенні n (n — натуральне, $n \geqslant 3$). При необмеженому збільшенні значення n периметри P_n и P'_n відповідно як завгодно мало відрізняються від довжин C і C' описаних кіл. Тоді при необмеженому збільшенні n відношення $\frac{P_n}{P'_n}$ як завгодно мало відрізнятиметься від відношення $\frac{C}{C'}$. З урахуванням рівності (*) доходимо висновку, що число $\frac{2R}{2R'}$ як завгодно мало відрізняється від числа $\frac{C}{C'}$. А це означає, що $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$ або $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$.

Остання рівність означає, що ***для всіх кіл відношення довжини кола до діаметра є одним і тим самим числом.***

Ви знаєте, що це число прийнято позначати грецькою буквою π (читають: «пі»).

З рівності $\frac{C}{2R} = \pi$ отримуємо формулу для обчислення довжини кола:

$$\boxed{C = 2\pi R}$$

Число π є ірраціональним, отже, його можна лише наближено подати у вигляді скінченного десяткового дробу. Зазвичай при розв'язуванні задач як наближене значення π приймають число 3,14.

Великий давньогрецький учений Архімед (III ст. до н. е.), виразивши через діаметр описаного кола периметр правильного 96-кутника, установив, що $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Звідси й випливає, що $\pi \approx 3{,}14$.

За допомогою сучасних комп'ютерів і спеціальних програм можна обчислити число π з величезною точністю. Наведемо запис числа π з 47 цифрами після коми:

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937\ldots$.

У 1992 р. число π обчислили з точністю до 1 011 196 691 цифри після коми. Цей факт було занесено до Книги рекордів Гіннеса. Саме число у книзі не наведено, оскільки для цього потрібно було б понад тисячу сторінок.

Знайдемо формулу для обчислення довжини дуги кола з градусною мірою $n°$. Оскільки градусна міра всього кола дорівнює $360°$, то довжина дуги в $1°$ дорівнює $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Тоді довжина l дуги в $n°$ обчислюється за формулою

$$\boxed{l = \frac{\pi R n}{180}}$$

Виведемо формулу для обчислення площі круга.

Звернемося знову до рисунка 49. Бачимо, що при збільшенні кількості сторін правильного n-кутника його площа S_n усе менше й менше відрізняється від площі S круга. При необмеженому збільшенні кількості сторін його площа наближається до площі круга.

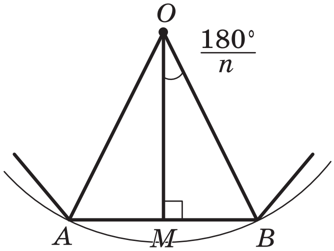


Рис. 51

На рисунку 51 зображено фрагмент правильного n-кутника з центром у точці O, зі стороною $AB = a_n$ і радіусом описаного кола, який дорівнює R. Опустимо перпендикуляр OM на сторону AB. Маємо:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OM = \frac{1}{2}a_n \cdot R\cos\frac{180°}{n}.$$

Оскільки радіуси, проведені у вершини правильного n-кутника, розбивають його на n рівних трикутників, то площа n-кутника S_n у n разів більша за площу трикутника AOB. Тоді

$$S_n = n \cdot S_{AOB} = \frac{1}{2}n \cdot a_n \cdot R\cos\frac{180°}{n},$$

тобто

$$S_n = \frac{1}{2}P_n \cdot R\cos\frac{180°}{n}, \qquad (**)$$

де P_n — периметр даного правильного n-кутника.

При необмеженому збільшенні значення n величина $\frac{180°}{n}$ буде як завгодно мало відрізнятися від 0°, а отже, $\cos\frac{180°}{n}$ наближатиметься до 1. Периметр P_n наближатиметься до довжини C кола, а площа S_n — до площі S круга. Тоді з урахуванням рівності (**) можна записати $S = \frac{1}{2}C \cdot R$.

З цієї рівності отримуємо формулу для знаходження площі круга:

$$\boxed{S = \pi R^2}$$

На рисунку 52 радіуси OA і OB поділяють круг на дві частини, які зафарбовано в різні кольори. Кожну з цих частин разом із радіусами OA і OB називають **круговим сектором** або просто **сектором**.

Зрозуміло, що круг радіуса R можна поділити на 360 рівних секторів, кожен з яких міститиме дугу в $1°$. Площа такого сектора дорівнює $\frac{\pi R^2}{360}$. Тоді площа S сектора, який містить дугу кола в $n°$, обчислюється за формулою

$$\boxed{S = \frac{\pi R^2 n}{360}}$$

На рисунку 53 хорда AB поділяє круг на дві частини, які зафарбовано в різні кольори. Кожну з цих частин разом з хордою AB називають **круговим сегментом** або просто **сегментом**. Хорду AB при цьому називають **основою сегмента**.

Щоб знайти площу сегмента, який зафарбовано в синій колір (рис. 54), треба від площі сектора, який містить хорду AB, відняти площу трикутника AOB (точка O — центр круга). Щоб знайти площу сегмента, який зафарбовано в жовтий колір, треба до площі сектора, який не містить хорду AB, додати площу трикутника AOB.

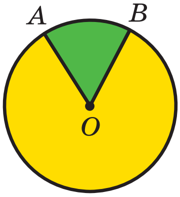


Рис. 52

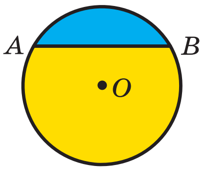


Рис. 53

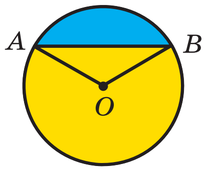


Рис. 54

Якщо хорда AB є діаметром круга, то вона поділяє круг на два сегменти, які називають **півкругами**. Площу S півкруга обчислюють за формулою $S = \frac{\pi R^2}{2}$, де R — радіус круга.

Приклад 1. Довжина дуги кола, радіус якого 25 см, дорівнює π см. Знайдіть градусну міру дуги.

Р о з в ’ я з а н н я. З формули $l = \frac{\pi R n}{180}$ отримуємо $n = \frac{180 l}{\pi R}$.

Отже, шукана градусна міра $n^\circ = \left(\frac{180\pi}{\pi \cdot 25}\right)^\circ = 7{,}2^\circ$.

В і д п о в і д ь: 7,2°.

П р и к л а д 2. У коло з центром O, радіус якого дорівнює 8 см, вписано правильний восьмикутник $ABCDEFMK$ (рис. 55). Знайдіть площі сектора і сегмента, які містять дугу AB.

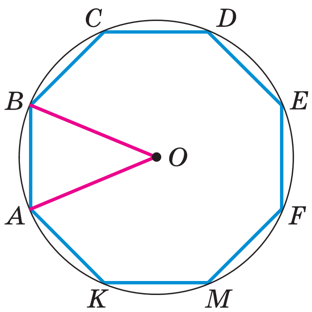


Рис. 55

Р о з в ’ я з а н н я. $\angle AOB$ — центральний кут правильного восьмикутника, $\angle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Тоді площа сектора, яку потрібно знайти, $S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 45}{360} = 8\pi \quad (\text{см}^2)$, площа сегмента

$$S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{\Delta AOB} = 8\pi - \frac{1}{2} OA^2 \sin\angle AOB = 8\pi - 16\sqrt{2} \quad (\text{см}^2).$$

В і д п о в і д ь: 8π см², $\left(8\pi - 16\sqrt{2}\right)$ см².

?

1. Яке відношення позначають буквою π?
2. Назвіть наближене значення числа π з точністю до сотих.
3. За якою формулою обчислюють довжину кола?
4. За якою формулою обчислюють довжину дуги кола?
5. За якою формулою обчислюють площу круга?
6. Поясніть, яку геометричну фігуру називають круговим сектором.
7. За якою формулою обчислюють площу кругового сектора?
8. Поясніть, яку геометричну фігуру називають круговим сегментом.
9. Поясніть, як можна знайти площу кругового сегмента.

ВПРАВИ

228.° Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює: 1) 1,2 см; 2) 3,5 см.

229.° Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює: 1) 6 см; 2) 1,4 м.

230.° Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює: 1) 4 см; 2) 14 дм.

231.° Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює: 1) 20 см; 2) 3,2 дм.

232.° Знайдіть площу круга, довжина кола якого дорівнює l.

233.° Обчисліть площу поперечного перерізу дерева, яке в обхваті становить 125,6 см.

234.° Як зміниться довжина кола, якщо його радіус:
1) збільшити у 2 рази;
2) зменшити у 3 рази?

235.° Радіус кола збільшили на 1 см. На скільки збільшилась при цьому довжина кола?

236.° Найбільший оптичний телескоп (рефлектор) в Україні знаходиться в Кримській астрономічній обсерваторії. Діаметр його дзеркала дорівнює 2,6 м. Найбільший у світі оптичний телескоп знаходиться в обсерваторії Каліфорнійського університету на Гавайях (США). Діаметр його дзеркала становить 10 м. У скільки разів довжина ободу американського телескопа більша за довжину ободу українського? Відповідь округліть до десятих.

237.° Обчисліть довжину червоної лінії, зображеної на рисунку 56.

238.° Як зміниться площа круга, якщо його радіус:
1) збільшити у 4 рази;
2) зменшити у 5 разів?

239.° Обчисліть площу заштрихованої фігури, зображеної на рисунку 57.

240.° Обчисліть площу заштрихованої фігури (рис. 58), якщо довжина сторони клітинки дорівнює a.

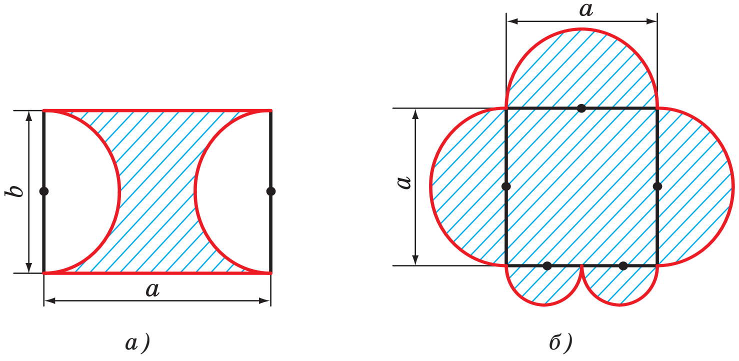


Рис. 56

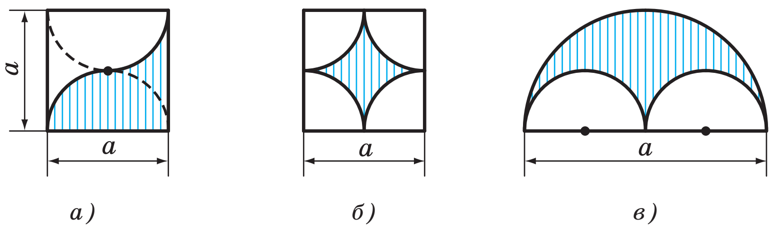


Рис. 57

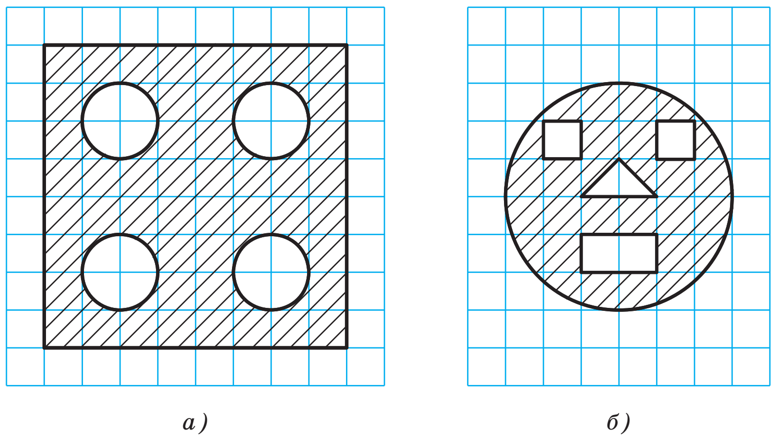


Рис. 58

241.° Млинець, діаметр якого дорівнює 30 см, коштує стільки ж, скільки два млинці, діаметр яких 20 см. Якщо всі млинці мають однакову товщину, то в якому випадку покупець з'їсть більше: коли придбає один великий млинець чи два менших?

242.° Знайдіть довжину кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною a.

243.° Знайдіть довжину кола, вписаного в квадрат зі стороною a.

244.° Знайдіть площу круга, описаного навколо квадрата зі стороною a.

245.° Знайдіть площу круга, вписаного в правильний шестикутник зі стороною a.

246.° Знайдіть площу круга, вписаного в правильний трикутник зі стороною a.

247.° Знайдіть площу круга, описаного навколо прямокутника зі сторонами a і b.

248.° Знайдіть площу круга, описаного навколо рівнобедреного трикутника з бічною стороною b і кутом α при основі.

249.° Знайдіть довжину кола, описаного навколо прямокутника зі стороною a і кутом α між даною стороною і діагоналлю прямокутника.

250.° Радіус кола дорівнює 8 см. Знайдіть довжину дуги кола, градусна міра якої дорівнює: 1) $4°$; 2) $18°$; 3) $160°$; 4) $320°$.

251.° Довжина дуги кола дорівнює 12π см, а її градусна міра — $27°$. Знайдіть радіус кола.

252.° Довжина дуги кола радіусом 24 см дорівнює 3π см. Знайдіть градусну міру дуги.

253.° Обчисліть довжину дуги екватора Землі, градусна міра якої дорівнює $1°$, якщо радіус екватора наближено дорівнює 6400 км.

254.° Радіус круга дорівнює 6 см. Знайдіть площу сектора, якщо градусна міра його дуги дорівнює: 1) $15°$; 2) $144°$; 3) $280°$.

255.° Площа сектора становить $\frac{5}{8}$ площі круга. Знайдіть градусну міру його дуги.

256.° Площа сектора дорівнює 6π дм^2. Знайдіть градусну міру дуги цього сектора, якщо радіус круга дорівнює 12 дм.

257.° Площа сектора дорівнює $\frac{5\pi}{4}$ см^2, а градусна міра дуги цього сектора становить 75°. Знайдіть радіус круга, частиною якого є даний сектор.

258.° Чи може сектор круга бути його сегментом?

259.° Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 5 см, а градусна міра дуги сегмента дорівнює: 1) 45°; 2) 150°; 3) 330°.

260.° Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 2 см, а градусна міра дуги сегмента дорівнює: 1) 60°; 2) 300°.

261.• Колеса автомобіля мають діаметр 65 см. Він рухається з такою швидкістю, що колеса роблять 6 обертів щосекунди. Знайдіть швидкість автомобіля в кілометрах за годину. Відповідь округліть до десятих.

262.• Знайдіть довжину дуги, яку описує годинна стрілка завдовжки 6 см за 1 год.

263.• Знайдіть довжину дуги, яку описує хвилинна стрілка завдовжки 24 см за 40 хв.

264.• Радіус кола збільшено на a. Доведіть, що довжина кола збільшиться на величину, яка не залежить від радіуса даного кола.

265.• Сторона трикутника дорівнює 6 см, а прилеглі до неї кути дорівнюють 50° і 100°. Знайдіть довжини дуг, на які поділяють описане коло трикутника його вершини.

266.• Сторона трикутника дорівнює $5\sqrt{3}$ см, а прилеглі до неї кути дорівнюють 35° і 25°. Знайдіть довжини дуг, на які поділяють описане коло трикутника його вершини.

267.• На катеті AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги цього кола, яка належить трикутнику, якщо $\angle A = 24°$, $AC = 20$ см.

268.$^{\bullet}$ Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. На висоті трикутника, яка проведена до основи і дорівнює 27 см, як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги кола, яка належить трикутнику.

269.$^{\bullet}$ Відрізок AB розбили на n відрізків. На кожному з них як на діаметрі побудували півколо. Цю дію повторили, розбивши даний відрізок на m відрізків. Знайдіть відношення сум довжин півкіл, отриманих у першому і другому випадках.

270.$^{\bullet}$ Доведіть, що площа півкруга, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника як на діаметрі (рис. 59), дорівнює сумі площ півкругів, побудованих на його катетах як на діаметрах.

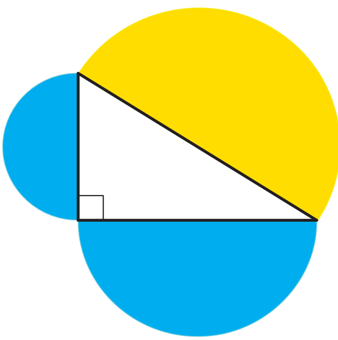


Рис. 59

271.$^{\bullet}$ Дві труби, діаметри яких дорівнюють 30 см і 40 см, потрібно замінити однією трубою з такою ж пропускною здатністю. Яким має бути діаметр цієї труби?

272.$^{\bullet}$ На скільки відсотків збільшиться площа круга, якщо його радіус збільшити на 10 %?

273.$^{\bullet}$ У круг вписано квадрат зі стороною a. Знайдіть площу меншого із сегментів, основою якого є сторона квадрата.

274.$^{\bullet}$ З листа жерсті, який має форму круга, вирізали правильний шестикутник найбільшої площі. Скільки відсотків жерсті пішло у відходи?

275.$^{\bullet}$ У круг вписано правильний трикутник зі стороною a. Знайдіть площу меншого із сегментів, основою якого є сторона трикутника.

276.$^{\bullet}$ У круговий сектор, радіус якого дорівнює R, а центральний кут становить 60°, вписано круг. Знайдіть площу цього круга.

277.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть площу розетки (заштрихованої фігури), яка зображена на рисунку 60, якщо сторона квадрата $ABCD$ дорівнює a.

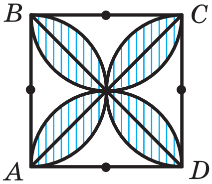


Рис. 60

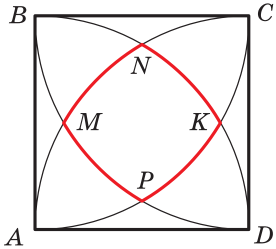


Рис. 61

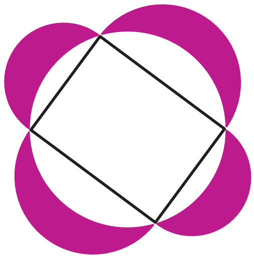


Рис. 62

278.•• При побудові чотирьох дуг з центрами у вершинах квадрата *ABCD* і радіусами, які дорівнюють стороні *a* квадрата, утворилася фігура, обмежена червоною лінією (рис. 61). Знайдіть довжину цієї лінії.

279.•• (Задача Гіппократа[1]). Навколо прямокутника описали коло і на кожній його стороні як на діаметрі побудували півколо (рис. 62). Доведіть, що сума площ зафарбованих фігур (серпиків Гіппократа) дорівнює площі прямокутника.

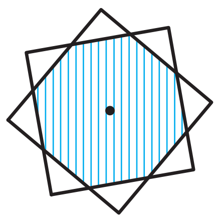


Рис. 63

280.•• Два квадрати зі сторонами 1 см мають спільний центр (рис. 63). Доведіть, що площа їх спільної частини більша за $\frac{\pi}{4}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

281. Знайдіть сторону ромба, якщо його висота дорівнює 6 см, а кут між стороною ромба і однією з діагоналей дорівнює 15°.

282. Бісектриса кута *A* прямокутника *ABCD* поділяє його сторону *BC* на відрізки *BM* і *MC* завдовжки 10 см і 14 см відповідно. На відрізки якої довжини ця бісектриса поділяє діагональ прямокутника?

[1] Гіппократ Хіоський — давньогрецький геометр (V ст. до н. е.).

283. Сума кутів при більшій основі трапеції дорівнює $90°$. Доведіть, що відстань між серединами основ трапеції дорівнює піврізниці основ.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

284. Чому дорівнює відстань між точками A і B координатної прямої, якщо:

1) A (3) і B (7);
2) A (−2) і B (4);
3) A (−2) і B (−6);
4) A (a) і B (b)?

285. Накресліть на координатній площині відрізок AB, знайдіть за рисунком координати середини відрізка і порівняйте їх із середнім арифметичним відповідних координат точок A і B, якщо:

1) A (−1; −6), B (5; −6);
2) A (3; 1), B (3; 5);
3) A (3; −5), B (−1; 3).

286. Побудуйте на координатній площині трикутник ABC і знайдіть його сторони, якщо A (5; −1), B (−3; 5), C (−3; −1).

287. У якій координатній чверті знаходиться точка: 1) A (3; −4); 2) B (−3; 1); 3) C (−4; −5); 4) D (1; 9)?

288. У якій координатній чверті знаходиться точка M, якщо:

1) її абсциса додатна, а ордината від’ємна;
2) добуток її абсциси і ординати — від’ємне число;
3) її абсциса і ордината від’ємні?

289. Що можна сказати про координати точки A, якщо:

1) точка A лежить на осі абсцис;
2) точка A лежить на бісектрисі четвертого координатного кута;
3) точка A лежить на осі ординат;
4) точка A лежить на бісектрисі третього координатного кута;
5) точка A лежить на бісектрисі першого координатного кута?

290. Укажіть координати вершин прямокутника *ABCD* (рис. 64).

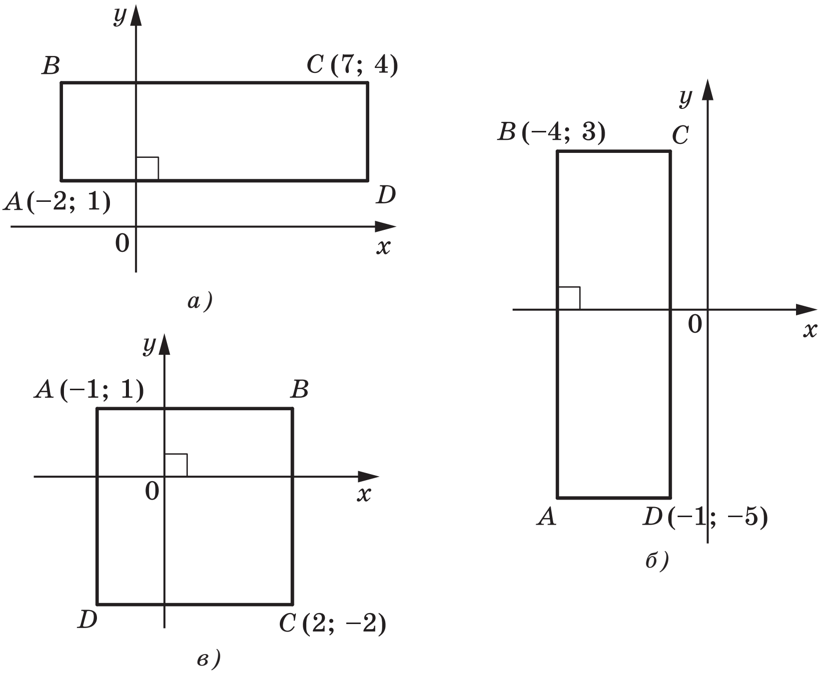


Рис. 64

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 2

1. Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його кут дорівнює $170°$.

А) 30; В) 36;
Б) 32; Г) такого многокутника не існує.

2. Чому дорівнює центральний кут правильного десятикутника?

А) $18°$; Б) $36°$; В) $144°$; Г) $10°$.

3. Який найбільший центральний кут може мати правильний многокутник?

А) $90°$; В) $150°$;
Б) $120°$; Г) не можна вказати.

4. Знайдіть довжину дуги кола, градусна міра якої дорівнює $207°$, якщо радіус кола — 4 см.

А) $4{,}6\pi$ см; Б) 4,6 см; В) 23π см; Г) 23 см.

5. Яку частину площі круга становить площа сектора, центральний кут якого дорівнює $140°$?

А) $\frac{7}{9}$; Б) $\frac{7}{12}$; В) $\frac{7}{15}$; Г) $\frac{7}{18}$.

6. У коло вписано правильний шестикутник, сторона якого дорівнює a. Знайдіть сторону трикутника, описаного навколо цього кола.

А) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; Б) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; В) $a\sqrt{3}$; Г) $2a\sqrt{3}$.

7. Чому дорівнює радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, менша діагональ якого дорівнює 12 см?

А) 6 см; Б) $6\sqrt{3}$ см; В) $2\sqrt{3}$ см; Г) 12 см.

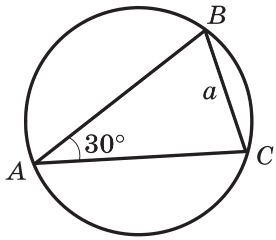
8. Вписаний в коло кут, який дорівнює $40°$, спирається на дугу завдовжки 8 см. Яка довжина даного кола?

А) 36 см; Б) 72π см; В) 72 см; Г) 36π см.

9. Якою має бути довжина хорди кола, радіус якого дорівнює R, щоб довжини дуг, на які кінці цієї хорди поділяють коло, відносилися як 2 : 1?

А) R; Б) $2R$; В)

$\frac{R\sqrt{3}}{2}$; Г) $R\sqrt{3}$.



10. На рисунку зображено вписаний у коло трикутник ABC, $\angle A = 30°$, $BC = a$. Чому дорівнює площа сегмента, основа якого стягує дугу BAC?

А) $\frac{a^2\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)}{12}$; В) $\frac{a^2\left(10\pi+3\sqrt{3}\right)}{12}$;

Б) $\frac{a^2\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)}{12}$; Г) $\frac{a^2\left(10\pi-3\sqrt{3}\right)}{12}$.

11. У трикутнику ABC $\angle A = 20°$, $\angle C = 30°$, $AC = 14$ см. Коло з центром у точці A дотикається прямої BC. Знайдіть довжину дуги цього кола, яка належить трикутнику ABC.

А) $\frac{7\pi}{18}$ см; Б) $\frac{7\pi}{9}$ см; В) $\frac{7\pi}{12}$ см; Г) $\frac{7\pi}{6}$ см.

12. Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а радіус вписаного у нього кола — 9 см. Скільки сторін має многокутник?

А) 6; Б) 12; В) 9; Г) 18.

ПІДСУМКИ

У ЦЬОМУ ПАРАГРАФІ:

- було введено такі поняття:
  - правильний многокутник;
  - центр правильного многокутника;
  - центральний кут правильного многокутника;
  - круговий сектор;
  - круговий сегмент;
  - основа сегмента;
- ви вивчили:
  - властивості правильного многокутника;
  - формули для знаходження радіусів описаного і вписаного кіл правильного многокутника;
  - формули для обчислення довжини кола і довжини дуги кола;
  - формули для обчислення площі круга і площі сектора;
- ви ознайомилися зі способом знаходження площі сегмента.

ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ §3

У цьому параграфі ви розширите свої знання про координатну площину.

Ви навчитеся знаходити довжину відрізка та координати його середини, знаючи координати його кінців.

Сформуєте уявлення про рівняння фігури, виведете рівняння прямої та кола.

Ознайомитеся з методом координат, який дозволяє розв'язувати геометричні задачі засобами алгебри.

8. Відстань між двома точками із заданими координатами. Координати середини відрізка

У 6 класі ви познайомилися з координатною площиною, тобто з площиною, на якій зображено дві перпендикулярні координатні прямі (вісь абсцис і вісь ординат) зі спільним початком відліку (рис. 65). Ви вмієте позначати на ній точки за їх координатами і навпаки, знаходити координати точки, позначеної на координатній площині.

Домовимося координатну площину з віссю x (віссю абсцис) і віссю y (віссю ординат) називати **площиною** $\boldsymbol{xy}$.

Координати точки на площині xy називають **декартовими координатами** на честь французького математика Рене Декарта (див. оповідання на с. 105, 106).

Ви знаєте, як знаходити відстань між двома точками, заданими своїми координата-

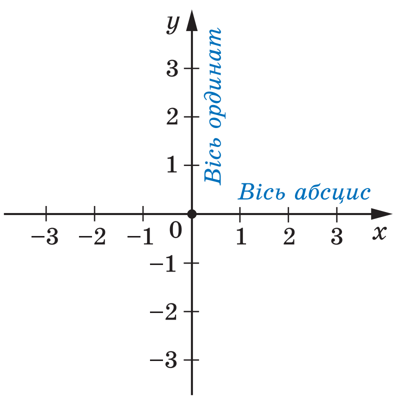


Рис. 65

ми на координатній прямій: для точок A (x_1) і B (x_2) (рис. 66) маємо:

Рис. 66

$$AB = |\, x_2 - x_1 \,|.$$

Навчимося знаходити відстань між точками A (x_1; y_1) і B (x_2; y_2), заданими на площині xy.

Розглянемо випадок, коли відрізок AB не перпендикулярний до жодної з координатних осей (рис. 67).

Через точки A і B проведемо прямі, перпендикулярні до координатних осей. Отримаємо прямокутний трикутник ACB. Очевидно, що $BC = |\, x_2 - x_1 \,|$, $AC = |\, y_2 - y_1 \,|$. Звідси $AB^2 = BC^2 + AC^2 = |\, x_2 - x_1 \,|^2 + |\, y_2 - y_1 \,|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

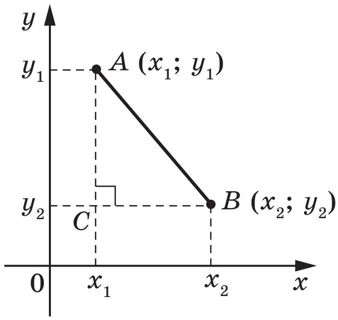


Рис. 67

Тоді формулу відстані між точками A (x_1; y_1) і B (x_2; y_2) можна записати так:

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Доведіть самостійно, що ця формула залишається правильною і для випадку, коли відрізок AB перпендикулярний до однієї з осей координат.

Нехай A (x_1; y_1) і B (x_2; y_2) — точки площини xy. Навчимося знаходити координати (x_0; y_0) точки M — середини відрізка AB.

Знов-таки розглянемо випадок, коли відрізок AB не перпендикулярний до жодної з координатних осей (рис. 68). Вважатимемо, що $x_2 > x_1$ (випадок, коли $x_2 < x_1$, розглядається аналогічно). Через точки A, M і B проведемо прямі, перпендикулярні до осі абсцис, які перетнуть цю вісь відповідно в точках A_1, M_1 і B_1. За теоремою

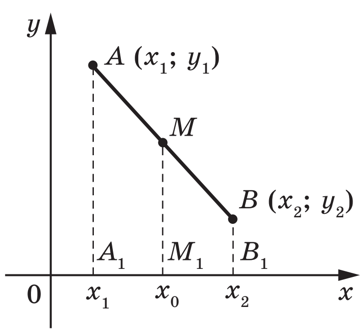


Рис. 68

Фалеса $A_1M_1 = M_1B_1$, тобто $|x_0 - x_1| = |x_2 - x_0|$. Оскільки $x_2 > x_0 > x_1$, то можемо записати: $x_0 - x_1 = x_2 - x_0$. Звідси

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

Аналогічно можна показати, що

$$\boxed{y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Формули для знаходження координат середини відрізка виконуються і у випадку, коли відрізок AB є перпендикулярним до однієї з осей координат (доведіть це самостійно).

Приклад 1. Доведіть, що трикутник, вершинами якого є точки $A\ (-1;\ 7)$, $B\ (1;\ 3)$ і $C\ (5;\ 5)$, є рівнобедреним прямокутним.

Розв'язання. Знайдемо довжини сторін даного трикутника:

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20};$$

$$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20};$$

$$AC = \sqrt{(5+1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

Отже, $AB = BC$, тобто $\Delta\ ABC$ — рівнобедрений.

Оскільки $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$, то $\Delta\ ABC$ — прямокутний.

Приклад 2. Точка $M\ (2;\ -5)$ — середина відрізка AB, $A\ (-1;\ 3)$. Знайдіть координати точки B.

Розв'язання. Позначимо $(x_B;\ y_B)$ — координати точки B, $(x_A;\ y_A)$ — координати точки A, $(x_M;\ y_M)$ — координати точки M.

Оскільки $\frac{x_A + x_B}{2} = x_M$, то маємо $\frac{-1 + x_B}{2} = 2$; $-1 + x_B = 4$; $x_B = 5$.

Аналогічно $\frac{y_A + y_B}{2} = y_M$; $\frac{3 + y_B}{2} = -5$; $y_B = -13$.

Відповідь: B (5; −13).

Приклад 3. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (2; −1), B (1; 3), C (−3; 2) і D (−2; −2) є прямокутником.

Розв'язання

Нехай точка M — середина діагоналі AC. Тоді

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2-3}{2} = -0{,}5; \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+2}{2} = 0{,}5.$$

Отже, M (−0,5; 0,5).

Нехай точка K — середина діагоналі BD. Тоді

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1-2}{2} = -0{,}5; \quad y_K = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{3-2}{2} = 0{,}5,$$

K (−0,5; 0,5).

Отже, точки M і K збігаються, тобто діагоналі чотирикутника $ABCD$ мають спільну середину. Звідси випливає, що $ABCD$ — паралелограм. Далі,

$$AC = \sqrt{(-3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34}, \quad BD = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}.$$

Таким чином, діагоналі паралелограма $ABCD$ рівні. Звідси випливає, що цей паралелограм є прямокутником.

1. Як знайти відстань між двома точками, якщо відомо їх координати?
2. Як знайти координати середини відрізка, якщо відомо координати його кінців?

ВПРАВИ

291.° Знайдіть відстань між точками A і B, якщо:
1) A (10; 14), B (5; 2); 2) A (−1; 2), B (4; −3).

292.° Знайдіть відстань між точками C і D, якщо:
1) C (−2; −4), D (4; −12); 2) C (6; 3), D (7; −1).

293.° Вершинами трикутника є точки A (−1; 3), B (5; 9), C (6; 2). Доведіть, що Δ ABC — рівнобедрений.

294.° Доведіть, що точка M(0; −1) є центром кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо A (6; −9), B (−6; 7), C (8; 5).

295.° Доведіть, що кути B і C трикутника ABC рівні, якщо A (5; −7), B (−3; 8), C (−10; −15).

296.° Знайдіть координати середини відрізка BC, якщо:
1) B (5; 4), C (3; 2); 2) B (−2; −1), C (−1; 7).

297.° Точка C — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо:
1) A (3; −4), C (2; 1); 2) A (−1; 1), C (0,5; −1).

298.° Точка K — середина відрізка AD. Заповніть таблицю:

Точка	Координати точки		
A	(−3; 1)	(−8; 2)	
D	(−1; −3)		(−9; 2)
K		(−4; 6)	(1; 2)

299.° Знайдіть довжину медіани BM трикутника, вершинами якого є точки A (3; −2), B (2; 3) і C (7; 4).

300.° Дано точки A (−2; 4) і B (2; −8). Знайдіть відстань від початку координат до середини відрізка AB.

301.• Доведіть, що трикутник з вершинами в точках A (2; 7), B (−1; 4), C (1; 2) є прямокутним.

302.• Точки A (−1; 2) і B (7; 4) є вершинами прямокутного трикутника. Чи може третя вершина трикутника мати координати: 1) (7; 2); 2) (2; −3)?

303.• Чи лежать на одній прямій точки:
1) A (−2; −7), B (−1; −4) і C (5; 14);
2) D (−1; 3), E (2; 13) і F (5; 21)?

У разі позитивної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

304.• Доведіть, що точки M (−4; 5), N (−10; 7) і K (8; 1) лежать на одній прямій, та вкажіть, яка з них лежить між двома іншими.

305.• При якому значенні x відстань між точками C (3; 2) і D (x; −1) дорівнює 5?

306.• На осі абсцис знайдіть точку, яка рівновіддалена від точок A (−1; −1) і B (2; 4).

307.• Знайдіть координати точки, яка належить осі ординат і рівновіддалена від точок D (−2; −3) і E (4; 1).

308.• Знайдіть координати точки, яка поділяє відрізок AB у відношенні 1 : 3, рахуючи від точки A, якщо A (5; −3) і B (−3; 7).

309.• Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, A (−5; 1), B (−4; 4), C (−1; 5). Знайдіть координати вершини D.

310.• Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, A (−2; −2), C (4; 1), D (−1; 1). Знайдіть координати вершини B.

311.• Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (−2; 8), B (3; −3), C (6; 2) і D (1; 13) є паралелограмом.

312.• Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (−3; −2), B (−1; 2), C (1; −2) і D (−1; −6) є ромбом.

313.• Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (−2; 6), B (−8; −2), C (0; −8) і D (6; 0) є квадратом.

314.• Точки D (1; 4) і E (2; 2) — середини сторін AC і BC трикутника ABC відповідно. Знайдіть координати вершин A і C, якщо B (−3; −1).

315.• Знайдіть довжину відрізка, кінці якого належать осям координат, а серединою є точка M (−3; 8).

316.•• Знайдіть координати вершини C рівностороннього трикутника ABC, якщо A (2; −3) і B (−2; 3).

317.•• Знайдіть координати вершини E рівностороннього трикутника DEF, якщо D (−6; 0) і F (2; 0).

318.•• У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, A (5; 9), C (1; −3), модулі координат точки B рівні. Знайдіть координати точки B.

319.•• Знайдіть координати всіх точок C осі абсцис таких, що $\Delta\, ABC$ — рівнобедрений, якщо A (1; 1), B (2; 3).

320.•• Знайдіть координати всіх точок B осі ординат таких, що $\Delta\, ABC$ — прямокутний, якщо A (1; 3), C (3; 7).

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

321. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AB = 9$ см, $BC = 3$ см. На гіпотенузі AB позначено точку M так, що $AM : MB = 1 : 2$. Знайдіть CM.

322. Знайдіть кути ромба, якщо кут між висотою і діагоналлю ромба, проведеними з однієї вершини, дорівнює 28°.

323. Діагональ BD паралелограма $ABCD$ дорівнює 24 см, точка E — середина сторони BC. Знайдіть відрізки, на які пряма AE поділяє діагональ BD.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

324. Точка A (1; −6) — центр кола, точка B (10; 6) належить цьому колу. Чому дорівнює радіус кола?

325. Відрізок CD — діаметр кола. Знайдіть координати центра кола і його радіус, якщо C (6; −4), D (−2; 10).

326. Яка фігура є графіком рівняння:

1) $y = 1$;
2) $y = 3x - 4$;
3) $x = -2$;
4) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$;
5) $xy = 1$;
6) $y = \sqrt{x}$?

9. Рівняння фігури. Рівняння кола

Координати $(x; y)$ кожної точки параболи, зображеної на рисунку 69, є розв'язком рівняння $y = x^2$. І навпаки, кожний розв'язок рівняння з двома змінними $y = x^2$ є координатами точки, яка лежить на цій параболі. У цьому разі говорять, що рівняння параболи, зображеної на рисунку 69, має вигляд $y = x^2$.

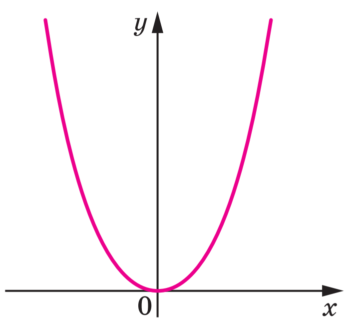


Рис. 69

Узагалі, **рівнянням фігури *F***, **заданої на площині *xy*, називають рівняння з двома змінними *x* і *y*, яке має дві властивості:**

1) якщо точка належить фігурі *F*, то її координати є розв'язком даного рівняння;

2) будь-який розв'язок (*x*; *y*) даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі *F*.

Наприклад, рівняння прямої, зображеної на рисунку 70, має вигляд $y = 2x - 1$, а рівняння гіперболи, зображеної на рисунку 71, — $y=\frac{1}{x}$. Також прийнято говорити, що, наприклад, рівняння $y = 2x - 1$ і $y=\frac{1}{x}$ **задають** пряму і гіперболу відповідно.

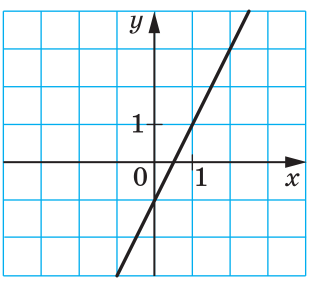


Рис. 70

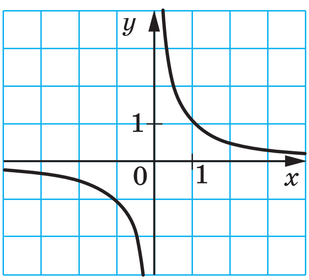


Рис. 71

Якщо дане рівняння є рівнянням фігури *F*, то цю фігуру можна розглядати як геометричне місце точок (ГМТ), координати яких задовольняють дане рівняння.

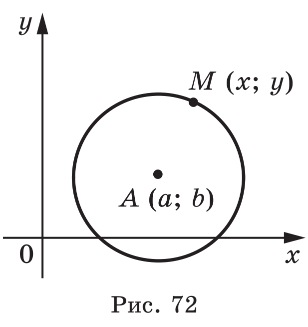


Рис. 72

Користуючись цими міркуваннями, виведемо рівняння кола з центром у точці A (a; b) і радіусом R.

Нехай M (x; y) — довільна точка даного кола (рис. 72). Тоді $AM = R$ або $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$. Звідси

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (*)$$

Ми показали, що координати (x; y) довільної точки M кола є розв'язком рівняння (*). Тепер покажемо, що будь-який розв'язок рівняння $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, де $R>0$, є координатами точки, яка належить даному колу.

Нехай пара $(x_1; y_1)$ — довільний розв'язок рівняння (*). Маємо: $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=R^2$. Звідси

$$\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}=R.$$

Ця рівність показує, що точка $N\ (x_1; y_1)$ віддалена від центра кола $A\ (a; b)$ на відстань, що дорівнює радіусу кола, а отже, точка $N\ (x_1; y_1)$ належить даному колу.

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 9.1. ***Рівняння***

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,}$$

де $R>0$, є рівнянням кола з центром у точці $A\ (a; b)$ і радіусом R.

Якщо центром кола є початок координат, то $a=b=0$. Рівняння кола, зображеного на рисунку 73, має вигляд:

$$x^2+y^2=R^2.$$

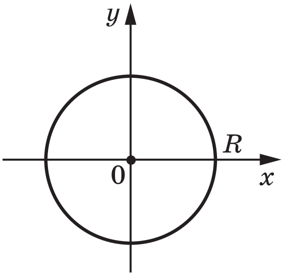


Рис. 73

Приклад 1. Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB, якщо $A\ (-5; 9)$, $B\ (7; -3)$.

Розв'язання. Оскільки центр кола є серединою діаметра, то можемо знайти координати $(a; b)$ центра C кола:

$$a=\frac{-5+7}{2}=1,\quad b=\frac{9-3}{2}=3.$$

Отже, $C\ (1; 3)$.

Радіус кола $R=AC$. Тоді $R^2=(1+5)^2+(3-9)^2=72$.

Отже, рівняння, яке потрібно було знайти, є таким:

$$(x-1)^2+(y-3)^2=72.$$

Приклад 2. Доведіть, що рівняння $x^2+y^2+6x-14y+50=0$ задає коло. Знайдіть координати центра і радіус цього кола.

Розв'язання. Подамо дане рівняння у вигляді $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$:

$$x^2+6x+9+y^2-14y+49+50-58=0;$$

$$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 8.$$

Отже, дане рівняння є рівнянням кола з центром у точці $(-3; 7)$ і радіусом $\sqrt{8}$.

Приклад 3. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A\ (-2; -3)$, $B\ (1; 3)$ і $C\ (5; 1)$ є прямокутним, і складіть рівняння кола, описаного навколо трикутника ABC.

Розв'язання. Знайдемо квадрати сторін даного трикутника:

$AB^2 = (1 + 2)^2 + (3 + 3)^2 = 45;$

$AC^2 = (5 + 2)^2 + (1 + 3)^2 = 65;$

$BC^2 = (5 - 1)^2 + (1 - 3)^2 = 20.$

Оскільки $AB^2 + BC^2 = AC^2$, то даний трикутник є прямокутним із прямим кутом при вершині B. Центром описаного кола є середина гіпотенузи AC — точка $(1,5; -1)$, радіус кола $R = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

Отже, шукане рівняння має вигляд:

$$(x - 1,5)^2 + (y + 1)^2 = \frac{65}{4}.$$

1. Що називають рівнянням фігури, заданої на площині xy?
2. Який вигляд має рівняння кола з центром у точці $(a; b)$ і радіусом R?
3. Який вигляд має рівняння кола з центром у початку координат і радіусом R?

ВПРАВИ

327.° Визначте за рівнянням кола координати його центра і радіус:

1) $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 25;$
2) $(x + 5)^2 + y^2 = 9;$
3) $x^2 + y^2 = 7;$
4) $x^2 + (y + 1)^2 = 3.$

328.° Складіть рівняння кола, якщо відомо координати його центра A і радіус R:

1) $A\ (3; 4)$, $R = 4;$
2) $A\ (-2; 0)$, $R = 1;$
3) $A\ (7; -6)$, $R = \sqrt{2};$
4) $A\ (0; 5)$, $R = \sqrt{7}.$

329.° Складіть рівняння кола, якщо відомо координати його центра B і радіус R:

1) $B\ (-1;\ 9)$, $R = 9$; 2) $B\ (-8;\ -8)$, $R = \sqrt{3}$.

330.° Визначте координати центра і радіус кола, зображеного на рисунку 74, і запишіть рівняння цього кола.

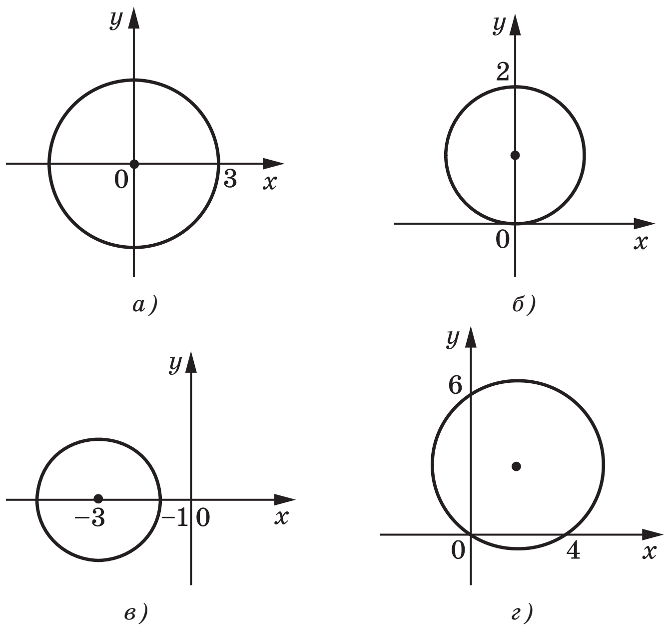


Рис. 74

331.° Радіус кола з центром у точці A дорівнює 4 (рис. 75). Складіть рівняння цього кола.

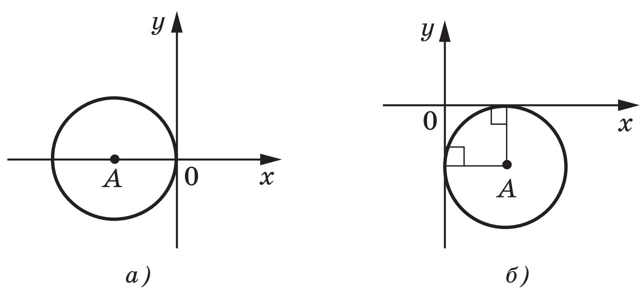


Рис. 75

332.° Побудуйте на координатній площині коло, рівняння якого має вигляд:

1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

333.° Побудуйте на координатній площині коло за його рівнянням $(x - 4)^2 + y^2 = 9$.

334.° Коло задано рівнянням $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 10$. З'ясуйте, які з точок A (−3; 0), B (−5; −2), C (1; 0), D (−4; 3), E (−7; −3), F (−9; 0) лежать: 1) на колі; 2) усередині кола; 3) поза колом.

335.° Чи належить колу $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$ точка:

1) A (8; −8); 2) B (6; −9); 3) C (−3; 7); 4) D (−4; 6)?

336.° Складіть рівняння кола з центром у точці M (−3; 1), яке проходить через точку K (−1; 5).

337.° Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB, якщо A (2; −7), B (−2; 3).

338.• Доведіть, що відрізок AB є діаметром кола $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 17$, якщо A (1; −5), B (9; −3).

339.• Доведіть, що відрізок CD є хордою кола $x^2 + (y - 9)^2 = 169$, якщо C (5; −3), D (−12; 4).

340.• Складіть рівняння кола, центром якого є точка P (− 6; 7) і яке дотикається до осі ординат.

341.• Складіть рівняння кола, центр якого знаходиться на прямій $y = -5$ і яке дотикається до осі абсцис у точці S (2; 0).

342.• Скільки існує кіл, радіуси яких дорівнюють $3\sqrt{5}$, центри належать осі ординат і які проходять через точку (3; 5)? Запишіть рівняння кожного такого кола.

343.• Складіть рівняння кола, центр якого належить осі абсцис і яке проходить через точки A (−4; 1) і B (8; 5).

344.• Доведіть, що коло $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 36$:

1) дотикається до осі ординат;

2) перетинає вісь абсцис;

3) не має спільних точок з прямою $y = 10$.

345.•• Установіть, чи є дане рівняння рівнянням кола. У разі позитивної відповіді вкажіть координати центра і радіус R цього кола:

1) $x^2 + 2x + y^2 - 10y - 23 = 0$;

2) $x^2 - 12x + y^2 + 4y + 40 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 6y + 8x + 34 = 0$;

4) $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 51 = 0$.

346.•• Доведіть, що дане рівняння є рівнянням кола, і вкажіть координати центра та радіус R цього кола:

1) $x^2 + y^2 + 16y + 60 = 0$;

2) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 15 = 0$.

347.•• Доведіть, що трикутник із вершинами в точках $A\ (-1;\ -2)$, $B\ (-1;\ 2)$, $C\ (5;\ 2)$ є прямокутним, і складіть рівняння кола, описаного навколо цього трикутника.

348.•• Складіть рівняння кола, радіус якого дорівнює 5 і яке проходить через точки $C\ (-1;\ 5)$ і $D\ (6;\ 4)$.

349.•• Складіть рівняння кола, радіус якого дорівнює $\sqrt{10}$ і яке проходить через точки $M\ (-2;\ 1)$ і $K\ (-4;\ -1)$.

350.•• Складіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і прямої $y = -4$.

351.•• Складіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і прямої $x = 2$.

352.* Складіть рівняння кола, яке проходить через точки:

1) $A\ (-3;\ 7)$, $B\ (-8,\ 2)$, $C\ (-6,\ -2)$;

2) $M\ (-1;\ 10)$, $N\ (12;\ -3)$, $K\ (4;\ 9)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

353. Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ перетинає його сторону AD у точці E, $AB = BE = 12$ см, $ED = 18$ см. Знайдіть площу паралелограма.

354. Перпендикуляр, опущений з вершини прямокутника на його діагональ, поділяє цю діагональ на відрізки завдовжки 9 см і 16 см. Знайдіть периметр прямокутника.

355. У рівнобічну трапецію вписано коло з радіусом 12 см. Одна з бічних сторін точкою дотику поділяється на два відрізки, один з яких дорівнює 16 см. Знайдіть площу трапеції.

10. Рівняння прямої

У попередньому пункті, розглядаючи коло як ГМТ, рівновіддалених від даної точки, ми вивели його рівняння. Для того, щоб вивести рівняння прямої, розглянемо її як ГМТ, рівновіддалених від двох точок.

Нехай a — задана пряма. Оберемо дві точки $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$ такі, щоб пряма a була серединним перпендикуляром відрізка AB (рис. 76).

Нехай $M\ (x;\ y)$ — довільна точка прямої a. Тоді $MA = MB$, тобто

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}. \qquad (*)$$

Ми показали, що координати $(x;\ y)$ довільної точки M прямої a є розв'язком рівняння (*).

Тепер покажемо, що будь-який розв'язок рівняння (*) є координатами точки, яка належить даній прямій a.

Нехай $(x_0;\ y_0)$ — довільний розв'язок рівняння (*). Маємо: $\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}=\sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2}$. Ця рівність означає, що точка $N\ (x_0;\ y_0)$ рівновіддалена від точок $A\ (x_1;\ y_1)$ та $B\ (x_2;\ y_2)$ і належить серединному перпендикуляру відрізка AB, тобто прямій a.

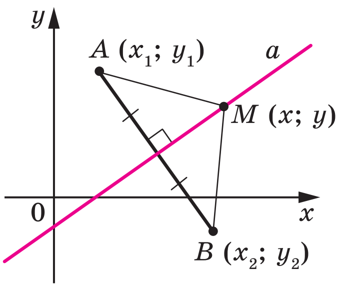


Рис. 76

Отже, ми довели, що рівняння (*) є рівнянням даної прямої a.

Проте з курсу алгебри 7 класу ви знаєте, що рівняння прямої має набагато простіший вигляд, а саме: $ax + by = c$, де a, b, c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно. Покажемо, що рівняння (*) можна звести до такого вигляду.

Маємо: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$. Піднесемо всі двочлени до квадрата і зведемо подібні доданки. Отримаємо:

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y=x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2.$$

Позначивши $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$, $x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = c$, отримаємо рівняння $ax + by = c$.

Оскільки точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ є різними, то хоча б одна з різниць $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ не дорівнює нулю. Отже, числа a і b не дорівнюють нулю одночасно.

Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема 10.1. ***Рівняння прямої має вигляд***

$$\boxed{ax + by = c,}$$

де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно.

Є правильним і таке твердження: будь-яке рівняння виду $ax + by = c$, де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно, є рівнянням прямої.

Зауваження. Якщо $a = b = c = 0$, то графіком рівняння $ax + by = c$ є вся площина xy. Якщо $a = b = 0$ і $c \neq 0$, то рівняння не має розв'язків.

Із курсу алгебри 7 класу ви знаєте, що рівняння виду $ax + by = c$ називають лінійним рівнянням з двома змінними. Схема, зображена на рисунку 77, ілюструє вищезазначене.

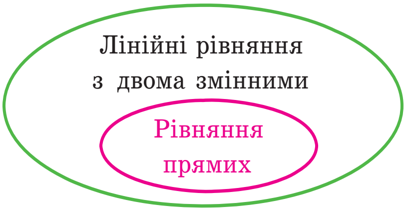


Рис. 77

Також на уроках алгебри в 7 класі ми прийняли без доведення той факт, що графіком лінійної функції $y = kx + p$ є пряма. Зараз ми можемо це довести.

Справді, перепишемо рівняння $y = kx + p$ так: $-kx + y = p$. Ми отримали рівняння виду $ax + by = c$ для випадку, коли $a = -k$, $b = 1$, $c = p$.

А чи будь-яку пряму на площині можна задати рівнянням виду $y = kx + p$? Відповідь на це запитання заперечна.

Річ у тім, що пряма, перпендикулярна до осі абсцис, не може бути графіком функції. Отже, ця пряма не може мати рівняння виду $y = kx + p$.

Разом з тим, якщо в рівнянні прямої $ax + by = c$ покласти $b = 0$, то його можна переписати так: $x = \frac{c}{a}$. Ми отримали окремий вид рівняння прямої, усі точки якої мають однакові абсциси. Отже, ця пряма перпендикулярна до осі абсцис. Її називають вертикальною.

Також зазначимо, що коли $b \neq 0$, то рівняння прямої $ax + by = c$ можна записати так: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Позначивши $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{a} = p$, отримаємо рівняння $y = kx + p$.

Отже, ***якщо $b = 0$ і $a \neq 0$, то рівняння прямої $ax + by = c$ задає вертикальну пряму; якщо $b \neq 0$, то це рівняння задає невертикальну пряму.***

Рівняння невертикальної прямої зручно записувати у вигляді $y = kx + p$.

Дана таблиця підсумовує матеріал, розглянутий у цьому пункті:

Рівняння	Значення a, b, c	Графік
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a і c — будь-які	невертикальна пряма
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c — будь-яке	вертикальна пряма
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	уся координатна площина
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—

Приклад 1. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки: 1) $A\ (-3;\ 5)$ і $B\ (-3;\ -6)$; 2) $C\ (6;\ 1)$ і $D\ (-18;\ -7)$.

Розв'язання

1) Оскільки дані точки мають рівні абсциси, то пряма AB є вертикальною і її рівняння має вигляд $x = -3$.

Відповідь: $x = -3$.

2) Оскільки дані точки мають різні абсциси, то пряма CD є невертикальною, і можна скористатися рівнянням прямої у вигляді $y = kx + p$.

Підставивши координати точок C і D у рівняння $y = kx + p$, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6k + p = 1, \\ -18k + p = -7. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знаходимо, що $k = \frac{1}{3}$, $p = -1$.

Відповідь: $y = \frac{1}{3}x - 1$.

Приклад 2. Знайдіть периметр і площу трикутника, обмеженого прямою $5x + 12y = -60$ і осями координат.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину даної прямої з осями координат.

З віссю абсцис: $5x = -60$, $x = -12$.

З віссю ординат: $12y = -60$, $y = -5$.

Отже, дана пряма і осі координат обмежують прямокутний трикутник AOB (рис. 78) такий, що $A\ (-12;\ 0)$, $B\ (0;\ -5)$, $O\ (0;\ 0)$. Тоді $OA = 12$, $OB = 5$, $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 13$. Шуканий периметр $P = OA + OB + AB = 30$, площа $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 30$.

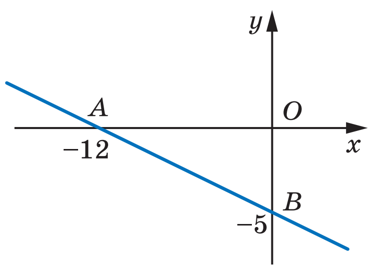


Рис. 78

Відповідь: $P = 30$, $S = 30$.

1. Який вигляд має рівняння прямої на площині xy?

2. Як прийнято називати пряму, усі точки якої мають однакові абсциси? Як розташована ця пряма відносно осі абсцис?

3. У якому вигляді зручно записувати рівняння невертикальної прямої?

4. Чи будь-яке лінійне рівняння з двома змінними є рівнянням прямої?

5. Чи будь-яку пряму на площині можна задати рівнянням виду $y = kx + p$?

6. За якої умови рівняння прямої $ax + by = c$ є рівнянням вертикальної прямої? невертикальної прямої?

ВПРАВИ

356.° Які з даних рівнянь є рівняннями прямої:

1) $2x - 3y = 5$; 4) $2x = 5$; 7) $0x + 0y = 0$;
2) $2x - 3y = 0$; 5) $-3y = 5$; 8) $0x + 0y = 5$?
3) $2x^2 - 3y = 5$; 6) $2x + 0y = 0$;

357.° Знайдіть координати точок перетину прямої $4x - 5y = 20$ з осями координат. Чи належить цій прямій точка: 1) A (10; 4); 2) B (6; 1); 3) C (–1,5; 5,2); 4) D (–1; 5)?

358.° Знайдіть координати точок перетину прямої $3x + 4y = 12$ з осями координат. Яка з точок M (–2; 4) і K (8; –3) належить цій прямій?

359.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку A (6; –3) і перпендикулярна до осі x. Які координати має точка перетину цієї прямої з віссю x?

360.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку B (5; –8) і перпендикулярна до осі y. Які координати має точка перетину цієї прямої з віссю y?

361.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку C (–4; 9) паралельно: 1) осі абсцис; 2) осі ординат.

362.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки:

1) A (1; –3) і B (–2; –9); 3) E (–4; –1) і F (9; –1);
2) C (3; 5) і D (3; –10); 4) M (3; –3) і K (– 6; 12).

363.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки:

1) A (2; –5) і B (–3; 10); 2) C (6; –1) і D (24; 2).

364.° Знайдіть координати точки перетину прямих:

1) $y = 3x - 7$ і $y = 5x + 9$;
2) $2x - 7y = -16$ і $6x + 11y = 16$.

365.° Знайдіть координати точки перетину прямих:

1) $y = -4x + 1$ і $y = 2x - 11$;

2) $3x + 2y = 10$ і $x - 8y = 12$.

366.• Точки A (−6; −1), B (1; 2) і C (−5; −8) — вершини трикутника ABC. Складіть рівняння прямої, яка містить медіану AK трикутника.

367.• Точки A (−3; −4), B (−2; 2), C (1; 3) і D (3; −2) — вершини трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Складіть рівняння прямої, яка містить середню лінію трапеції.

368.• Абсциси середин бічних сторін трапеції рівні. Чи є правильним твердження, що основи трапеції перпендикулярні до осі абсцис?

369.• Знайдіть периметр трикутника, обмеженого осями координат і прямою $4x - 3y = 12$.

370.• Знайдіть площу трикутника, обмеженого осями координат і прямою $7y - 2x = 28$.

371.• Знайдіть площу трикутника, обмеженого прямими $3x + 2y = 6$ і $y = -\frac{9}{4}x$ та віссю ординат.

372.• Доведіть, що коло $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 9$ і пряма $x + y = 7$ перетинаються, та знайдіть координати їх точок перетину.

373.• Доведіть, що пряма $x + y = 5$ є дотичною до кола $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$, та знайдіть координати точки дотику.

374.• Доведіть, що коло $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$ і пряма $3x + y = 3$ не мають спільних точок.

375.•• Знайдіть відстань від початку координат до прямої $5x - 2y = 10$.

376.•• Знайдіть відстань від початку координат до прямої $x + y = -8$.

377.•• Знайдіть довжину хорди кола $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, яка лежить на прямій $y = 3x$.

378.•• Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, які проходять через точки A (1; −7) і B (−3; 5).

379.•• Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, які проходять через точки C (2; 3) і D (−5; −2).

380.•• Знайдіть координати точки, яка рівновіддалена від осей координат і від точки A (3; 6).

381.•• Знайдіть координати точки, яка рівновіддалена від осей координат і від точки B (−4; 2).

382.* Складіть рівняння кола, яке проходить через точки A (2; 0) та B (4; 0) і центр якого належить прямій $2x + 3y = 18$.

383.* Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, радіус яких дорівнює 5 і які відтинають на осі абсцис хорду завдовжки 6.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

384. Діагоналі паралелограма дорівнюють $6\sqrt{2}$ см і 8 см, а кут між ними становить 45°. Знайдіть сторони паралелограма.

385. Одна зі сторін трикутника на 15 см більша за другу, а висота, проведена до третьої сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 32 см і 7 см. Знайдіть периметр трикутника.

386. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на її більшій основі. Знайдіть радіус кола, якщо діагональ трапеції дорівнює 20 см, а висота — 12 см.

11. Кутовий коефіцієнт прямої

Розглянемо рівняння $y = kx$. Воно задає невертикальну пряму, яка проходить через початок координат.

Покажемо, що прямі $y = kx$ та $y = kx + b$, де $b \neq 0$, паралельні. Точки O (0; 0) і C (1; k) належать прямій $y = kx$, а точки A (0; b) і B (1; $k + b$) належать прямій $y = kx + b$ (рис. 79). Легко переконатися (зробіть це самостійно), що середини діагоналей AC і OB чотирикутника $OABC$ збігаються. Отже, $OABC$ — паралелограм. Звідси $AB \parallel OC$.

Тепер ми можемо зробити такий висновок:

якщо** $k_1 = k_2$ **і** $b_1 \neq b_2$**, то прямі** $y = k_1x + b_1$ **і** $y = k_2x + b_2$ **паралельні (1).

Нехай пряма $y = kx$ перетинає одиничне півколо у точці M $(x_0; y_0)$ (рис. 80). Кут AOM називають **кутом між даною прямою і додатним напрямом осі абсцис**.

Якщо пряма $y = kx$ збігається з віссю абсцис, то кут між цією прямою і додатним напрямом осі абсцис вважають рівним $0°$.

Якщо пряма $y = kx$ утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α, то природно вважати, що й пряма $y = kx + b$, яка паралельна прямій $y = kx$, також утворює кут α з додатним напрямом осі абсцис.

Розглянемо пряму MO, рівняння якої має вигляд $y = kx$ (рис. 80). Якщо $\angle MOA = \alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_0}{x_0}$. Оскільки точка M $(x_0; y_0)$ належить прямій $y = kx$, то $\frac{y_0}{x_0} = k$. Звідси $k = \operatorname{tg}\alpha$.

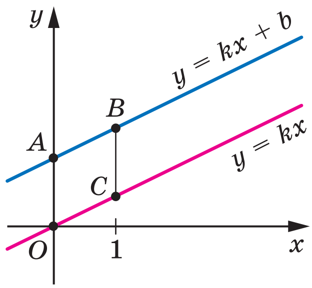


Рис. 79

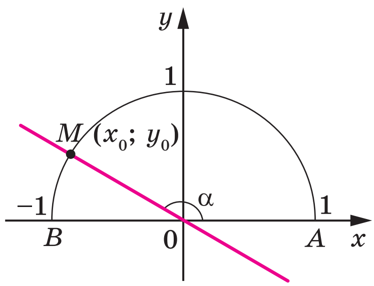


Рис. 80

Таким чином, для прямої $y = kx + b$ отримуємо, що

$$\boxed{k = \operatorname{tg}\alpha,}$$

де α — кут, який утворює ця пряма з додатним напрямом осі абсцис. Тому коефіцієнт k називають **кутовим коефіцієнтом** цієї прямої.

Із вищезазначеного випливає, що коли невертикальні прямі паралельні, то вони утворюють рівні кути з додатним напрямом осі абсцис. Тоді тангенси цих кутів рівні, а отже, рівні їх кутові коефіцієнти.

Таким чином,

якщо прямі $y = k_1x + b_1$ ***і*** $y = k_2x + b_2$ ***паралельні, то*** $k_1 = k_2$ **(2).**

Висновки (1) і (2) об'єднаємо в одну теорему.

Теорема 11.1. ***Прямі*** $y = k_1x + b_1$ ***і*** $y = k_2x + b_2$ ***є паралельними тоді і тільки тоді, коли*** $k_1 = k_2$ ***і*** $b_1 \neq b_2$.

Приклад. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A\ (-4;\ 3)$ і паралельна прямій $y = 0{,}5x - 4$.

Розв'язання. Нехай рівняння шуканої прямої $y = kx + p$. Оскільки ця пряма і пряма $y = 0{,}5x - 4$ паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні, тобто $k = 0{,}5$.

Отже, маємо $y = 0{,}5x + p$. Ураховуючи, що дана пряма проходить через точку $A\ (-4;\ 3)$, отримуємо: $0{,}5 \cdot (-4) + p = 3$, звідси $p = 5$.

Шукане рівняння є таким: $y = 0{,}5x + 5$.

?

1. Поясніть, що називають кутом між прямою і додатним напрямом осі абсцис.
2. Чому вважають рівним кут між прямою, яка паралельна осі абсцис або збігається з нею, та додатним напрямом осі абсцис?
3. Що називають кутовим коефіцієнтом прямої?
4. Як пов'язані кутовий коефіцієнт прямої і кут між прямою й додатним напрямом осі абсцис?
5. Яка необхідна і достатня умова паралельності двох невертикальних прямих на координатній площині?

ВПРАВИ

387.° Чому дорівнює кутовий коефіцієнт прямої:

1) $y = 2x - 7$; 3) $y = x + 10$; 5) $y = 4$;
2) $y = -3x$; 4) $y = 5 - x$; 6) $3x - 2y = 4$?

388.° Які з прямих $y = 6x - 5$, $y = 0{,}6x + 1$, $y = \frac{3}{5}x + 4$, $y = 2 - 6x$ і $y = 600 + 0{,}6x$ паралельні?

389.° Яке число треба підставити замість зірочки, щоб були паралельними прямі:

1) $y = 8x - 14$ і $y = {*}x + 2$;
2) $y = {*}x - 1$ і $y = 3 - 4x$?

390.° Яке рівняння прямої, що проходить через початок координат і паралельна прямій:

1) $y = 14x - 11$; 2) $y = -1{,}15x + 2$?

391.• Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку A $(-3;\ 7)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює: 1) 4; 2) −3; 3) 0.

392.• Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку B $(2;\ -5)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює −0,5.

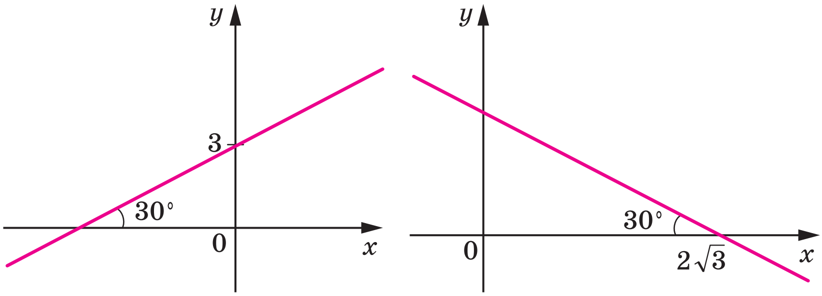
393.• Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку M $(-1;\ 9)$ і паралельна прямій: 1) $y = -7x + 3$; 2) $3x - 4y = -8$.

394.• Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $K\left(-\frac{1}{3}; 10\right)$ і паралельна прямій: 1) $y = 9x - 16$; 2) $6x + 2y = 7$.

395.• Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку A $(2;\ 6)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут: 1) $60°$; 2) $120°$.

396.• Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку B $(3;\ -2)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут: 1) $45°$; 2) $135°$.

397.• Складіть рівняння прямої, зображеної на рисунку 81.



а) *б)*

Рис. 81

398.• Визначте, чи паралельні прямі:

1) $2x - 5y = 9$ і $5y - 2x = 1$;
2) $8x + 12y = 15$ і $4x + 6y = 9$;
3) $7x - 2y = 12$ і $7x - 3y = 12$;
4) $3x + 2y = 3$ і $6x + 4y = 6$.

399.• Доведіть, що прямі $7x - 6y = 3$ і $6y - 7x = 6$ паралельні.

400.•• Складіть рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = 4x + 2$ і перетинає пряму $y = -8x + 9$ у точці, що належить осі ординат.

401.•• Складіть рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = 3x + 4$ і перетинає пряму $y = -4x + 16$ у точці, що належить осі абсцис.

402.* Складіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до прямої $y = -x + 3$ і проходить через точку A (1; 5).

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

403. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ бісектриси кутів A і B перетинаються в точці O (рис. 82). Доведіть, що кут AOB дорівнює півсумі кутів C і D.

404. Висота ромба, проведена з вершини його тупого кута, поділяє сторону ромба на відрізки 7 см і 18 см, рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть діагоналі ромба.

405. Медіани рівнобедреного трикутника дорівнюють 15 см, 15 см і 18 см. Знайдіть площу трикутника.

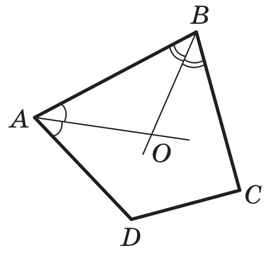
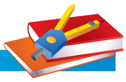


Рис. 82

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ



Метод координат

Ми часто говоримо: пряма $y = 2x - 1$, парабола $y = x^2$, коло $x^2 + y^2 = 1$, тим самим ототожнюючи фігуру з її рівнянням. Такий підхід дозволяє зводити задачу про пошук властивостей фігури до задачі про дослідження її рівняння. У цьому й полягає суть методу координат.

Проілюструємо сказане на такому прикладі.

Із наочних міркувань цілком очевидно, що пряма й коло мають не більше двох спільних точок. Проте це твердження не є аксіомою і його потрібно доводити.

Ця задача зводиться до дослідження кількості розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ (x-m)^2 + (y-n)^2 = R^2, \end{cases}$$

де числа a і b одночасно не дорівнюють нулю і $R > 0$.

Розв'язуючи цю систему методом підстановки, ми отримаємо квадратне рівняння, яке може мати два розв'язки, один розв'язок або взагалі не мати розв'язків. Отже, для даної системи є три можливі випадки:

1) система має два розв'язки — пряма і коло перетинаються у двох точках;

2) система має один розв'язок — пряма дотикається до кола;

3) система не має розв'язків — пряма і коло не мають спільних точок.

З кожним із цих випадків ви зустрічалися, розв'язуючи задачі 372–374 відповідно.

Метод координат є особливо ефективним у тих випадках, коли потрібно знайти фігуру, усім точкам якої притаманна задана властивість, тобто знайти ГМТ.

Зафіксуємо на площині дві точки A і B. Ви добре знаєте, якою фігурою є геометричне місце точок M таких, що $\frac{MA}{MB}=1$. Це серединний перпендикуляр відрізка AB. Цікаво з'ясувати, яку фігуру утворюють усі точки M, для яких $\frac{MA}{MB}=k$, де $k \neq 1$. Розв'яжемо цю задачу для $k=\frac{1}{2}$.

Площину, на якій зафіксовано точки A і B, «перетворимо» в координатну. Зробимо це так: за початок відліку оберемо точку A, за одиничний відрізок — відрізок AB, вісь абсцис проведемо так, щоб точка B мала координати (1; 0) (рис. 83).

Нехай M $(x; y)$ — довільна точка шуканої фігури F. Тоді $2MA = MB$, або $4MA^2 = MB^2$. Звідси:

$$4(x^2 + y^2) = (x - 1)^2 + y^2;$$

$$3x^2 + 2x + 3y^2 = 1;$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + y^2 = \frac{1}{3};$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + y^2 = \frac{4}{9};$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}. \qquad (*)$$

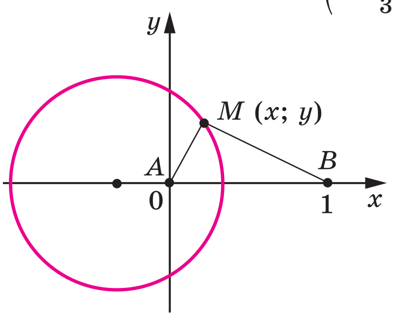


Рис. 83

Отже, якщо точка M $(x; y)$ належить фігурі F, то її координати є розв'язком рівняння (*).

Нехай $(x_1; y_1)$ — якийсь розв'язок рівняння (*). Тоді легко показати, що

$$4\left(x_1^2 + y_1^2\right) = (x_1 - 1)^2 + y_1^2.$$

А це означає, що точка N $(x_1; y_1)$ є такою, що $4NA^2 = NB^2$ або $2NA = NB$. Отже, точка N належить фігурі F.

Таким чином, рівнянням фігури F є рівняння (*), тобто фігура F — це коло з центром у точці $O\left(-\frac{1}{3};0\right)$ і радіусом $\frac{2}{3}$.

Ми розв’язали задачу для окремого випадку, коли $k=\frac{1}{2}$. Можна показати, що шуканою фігурою буде коло для будь-якого додатного $k \neq 1$. Це коло називають **колом Аполлонія**[1].

Як будували міст між геометрією та алгеброю

Ідея координат зародилася дуже давно. Адже ще в давнину люди вивчали Землю, спостерігали зірки, а за результатами своїх досліджень складали карти, схеми.

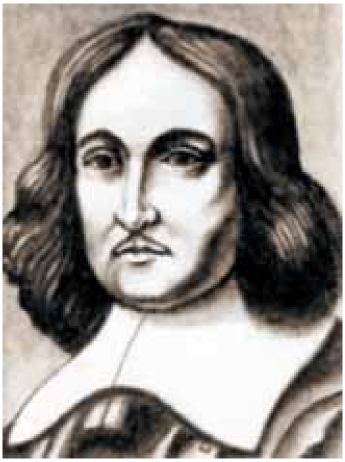
У II ст. до н. е. давньогрецький учений Гіппарх уперше використав ідею координат для визначення місця розташування об’єктів на поверхні Землі.

Лише в XIV ст. французький учений Ніколя Орем (близько 1323–1392) уперше застосував у математиці ідею Гіппарха: він розбив площину на клітинки (як розбито аркуш вашого зошита) і став задавати положення точок широтою і довготою.

Однак величезні можливості застосування цієї ідеї були розкриті лише у XVII ст. у роботах видатних французьких математиків П’єра Ферма (1601–1665) і Рене Декарта (1596–1650). У своїх роботах ці вчені показали, як завдяки системі координат можна переходити від точок до чисел, від ліній до рівнянь, від геометрії до алгебри.

Попри те що П. Ферма опублікував свою роботу на рік раніше за Р. Декарта, систему координат, якою ми сьогодні користуємося, називають **декартовою**. Це пов’язано з тим, що Р. Декарт у своїй роботі «Міркування про метод»

[1] Аполлоній Пергський (III ст. до н. е.) — давньогрецький математик і астроном.



П'єр Ферма

Рене Декарт

винайшов нову зручну буквену символіку, якою з незначними змінами ми користуємося й сьогодні. Слідом за Декартом ми позначаємо змінні останніми буквами латинського алфавіту x, y, z, а коефіцієнти — першими: a, b, c, ... Звичні нам позначення степенів x^2, y^3, z^5 і т. д. також увів Р. Декарт.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 3

1. Які координати має середина відрізка AB, якщо $A\ (-6;\ 7)$, $B\ (4;\ -9)$?

А) $(-5;\ 8)$; Б) $(-1;\ -1)$; В) $(-5;\ -1)$; Г) $(-1;\ 8)$.

2. Чому дорівнює відстань між точками $C\ (8;\ -11)$ і $D\ (2;\ -3)$?

А) 100; Б) 10; В) $\sqrt{296}$; Г) $\sqrt{164}$.

3. Які координати має центр кола $(x-5)^2+(y+9)^2=16$?

А) $(5;\ -9)$; Б) $(-5;\ 9)$; В) $(5;\ 9)$; Г) $(-5;\ -9)$.

4. Центром якого з даних кіл є початок координат?

А) $x^2+(y-1)^2=1$; В) $x^2+y^2=1$;
Б) $(x-1)^2+y^2=1$; Г) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

5. Знайдіть радіус кола, діаметром якого є відрізок MK, якщо $M\ (14;\ 12)$ і $K\ (-10;\ 2)$.

А) 26; Б) 13; В) 25; Г) 5.

6. Які координати точки перетину прямої $5x-3y=15$ з віссю абсцис?

А) $(0;\ -5)$; Б) $(-5;\ 0)$; В) $(0;\ 3)$; Г) $(3;\ 0)$.

7. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, $B\ (-2;\ 3)$, $C\ (10;\ 9)$, $D\ (7;\ 0)$. Знайдіть координати вершини A.

А) $(1;\ 6)$; Б) $(19;\ -3)$; В) $(-5;\ -6)$; Г) $(6;\ 5)$.

8. Знайдіть координати точки осі ординат, яка рівновіддалена від точок $A\ (-3;\ 4)$ і $B\ (1;\ 8)$.

А) $(-5;\ 0)$; Б) $(0;\ -5)$; В) $(5;\ 0)$; Г) $(0;\ 5)$.

9. Знайдіть абсцису точки прямої AB, де $A\ (-7;\ 4)$, $B\ (9;\ 12)$, ордината якої дорівнює 2.

А) 8,5; Б) -11; В) 4; Г) -2.

10. Знайдіть відстань між точкою перетину прямих $x-y=4$ і $x+3y=12$ та точкою $M\ (1;\ 7)$.

А) 5; Б) 50; В) $5\sqrt{2}$; Г) $2\sqrt{5}$.

11. Яким є рівняння прямої, що проходить через точку $P\ (-1;\ 6)$ паралельно прямій $y=2x-5$?

А) $y=6-5x$; В) $y=5x-6$;
Б) $y=2x+8$; Г) $y=2x-8$.

12. Чому дорівнює радіус кола $x^2+y^2+14y-12x+78=0$?

А) $\sqrt{7}$; Б) 7; В) 14; Г) $\sqrt{14}$.

ПІДСУМКИ

У ЦЬОМУ ПАРАГРАФІ:

- було введено такі поняття:
  - координатна площина;
  - декартові координати;
  - рівняння фігури;
  - кут між прямою і додатним напрямом осі абсцис;
  - кутовий коефіцієнт прямої;
- ви вивчили:
  - формули знаходження довжини відрізка і координат його середини;
  - рівняння кола;
  - рівняння прямої;
  - необхідну і достатню умову паралельності двох прямих;
- ви ознайомилися з методом координат.

ВЕКТОРИ §4

Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви дізнаєтесь, що вектори є не тільки у фізиці, а й у геометрії.

Ви навчитеся додавати і віднімати вектори, множити вектор на число, знаходити кут між двома векторами, застосовувати властивості векторів для розв'язування задач.

12. Поняття вектора

Ви знаєте багато величин, які визначаються своїми числовими значеннями: маса, площа, довжина, об'єм, час, температура тощо. Такі величини називають **скалярними величинами**, або просто **скалярами**.

Із курсу фізики вам знайомі величини, для задання яких недостатньо знати тільки їх числові значення. Наприклад, якщо на пружину діє сила 5Н, то не зрозуміло, чи буде пружина стискатися або розтягуватися (рис. 84). Потрібно ще знати, у якому напрямі діє сила.

Рис. 84

Величини, які визначаються не тільки числовим значенням, але й напрямом, називають **векторними величинами**, або просто **векторами**.

Сила, переміщення, швидкість, прискорення, вага — приклади векторних величин.

Є вектори й у геометрії. Це **напрямлені відрізки**.

Розглянемо відрізок AB. Якщо ми домовимося точку A вважати **початком** відрізка, а точку B — його **кінцем**, то такий відрізок буде характеризуватися не тільки довжиною, але й напрямом від точки A до точки B.

Якщо вказано, яка точка є початком відрізка, а яка точка — його кінцем, то такий відрізок називають **напрямленим відрізком**, або **вектором**.

Вектор з початком у точці A і кінцем у точці B позначають так: $\overrightarrow{AB}$ (читають: «вектор AB»).

На рисунках вектор зображають відрізком зі стрілкою, яка вказує його кінець. На рисунку 85 зображено вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Для позначення векторів також використовують маленькі букви латинського алфавіту зі стрілкою згори. На рисунку 86 зображено вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

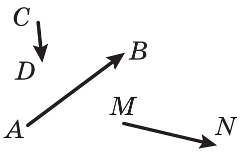


Рис. 85

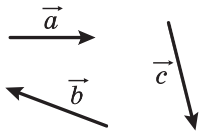


Рис. 86

Домовилися вектор, у якого початок і кінець — одна й та сама точка, називати **нульовим вектором**, або **нуль-вектором**, і позначати $\vec{0}$. Якщо початок і кінець нульового вектора — це точка A, то його можна позначити й так: $\overrightarrow{AA}$. На рисунках нульовий вектор зображають однією точкою.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають так: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, а модуль вектора $\vec{a}$ — так: $|\vec{a}|$.

Модуль нульового вектора вважають рівним нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Означення. **Ненульові вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій.**

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

На рисунку 87 зображено колінеарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{MN}$.

Той факт, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, позначають так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

На рисунку 88 ненульові колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однаково напрямлені. Такі вектори називають **співнапрямленими** і позначають $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$.

Зрозуміло, що коли $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$ і $\vec{b} \upuparrows \vec{c}$, то $\vec{a} \upuparrows \vec{c}$ (рис. 89).

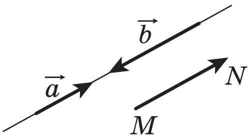


Рис. 87

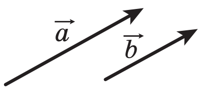


Рис. 88

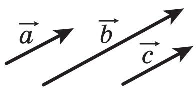


Рис. 89

На рисунку 90 ненульові колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ **протилежно напрямлені**. Цей факт позначають так: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Означення. **Ненульові вектори називають рівними, якщо їх модулі рівні й вони співнапрямлені. Будь-які два нульові вектори рівні.**

На рисунку 91 зображено рівні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Це позначають так: $\vec{a} = \vec{b}$.

Рівність ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ означає, що $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$ і $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Очевидно, що коли $\vec{a} = \vec{b}$ і $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.

На рисунку 92 зображено вектор $\vec{a}$ з початком у точці A. Говорять, що вектор $\vec{a}$ **відкладено від точки** A.

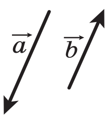


Рис. 90

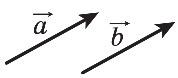


Рис. 91

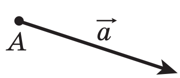


Рис. 92

Покажемо, як від довільної точки M відкласти вектор, рівний даному вектору $\vec{a}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ нульовий, то шуканим вектором буде вектор $\overrightarrow{MM}$. Тепер розглянемо випадок, коли $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Нехай точка M лежить на прямій, яка містить вектор $\vec{a}$ (рис. 93). На цій прямій існують дві точки E і F такі, що $ME = MF = |\vec{a}|$. На цьому рисунку вектор $\overrightarrow{MF}$ дорівнюватиме вектору $\vec{a}$. Його і слід обрати.

Якщо точка M не належить прямій, яка містить вектор $\vec{a}$, то через точку M проведемо пряму, їй паралельну (рис. 94). Подальша побудова аналогічна вже розглянутій.

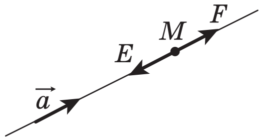


Рис. 93

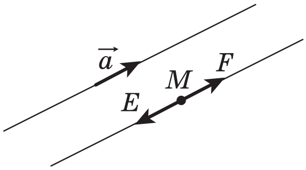


Рис. 94

Зрозуміло, що від заданої точки можна відкласти тільки один вектор, рівний даному.

Приклад. Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ і $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

Розв'язання. З умови $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ випливає, що $AB \parallel DC$ і $AB = DC$. Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Рівність $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ означає, що діагоналі чотирикутника $ABCD$ рівні. А паралелограм з рівними діагоналями — прямокутник.

?

1. Наведіть приклади скалярних величин.
2. Які величини називають векторними?
3. Що в геометрії називають векторами?
4. Які з величин є векторними: час, вага, прискорення, імпульс, маса, переміщення, шлях, площа, тиск?
5. Чим характеризується напрямлений відрізок?

6. Який відрізок називають напрямленим відрізком, або вектором?
7. Як позначають вектор з початком у точці A і кінцем у точці B?
8. Який вектор називають нульовим?
9. Що називають модулем вектора $\overrightarrow{AB}$?
10. Чому дорівнює модуль нульового вектора?
11. Які вектори називають колінеарними?
12. Як позначають співнапрямлені вектори? протилежно напрямлені вектори?
13. Які вектори називають рівними?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

406.° Позначте три точки A, B і C, які не лежать на одній прямій. Накресліть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{CB}$.

407.° Проведіть пряму і позначте на ній точку A. Накресліть два співнапрямлені вектори, які належать прямій a і кінці яких збігаються з точкою A.

408.° Накресліть трикутник ABC. Накресліть вектор, співнапрямлений із вектором $\overrightarrow{CA}$, початок якого знаходиться в точці B.

409.° Дано вектор $\vec{a}$ і точку A (рис. 95). Відкладіть від точки A вектор, рівний вектору $\vec{a}$.

410.° Дано вектор $\vec{b}$ і точку B (рис. 96). Відкладіть від точки B вектор, рівний вектору $\vec{b}$.

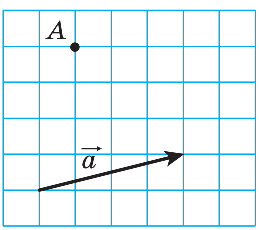


Рис. 95

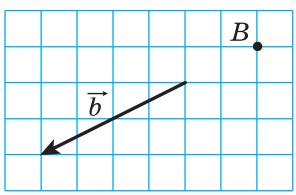


Рис. 96

411.° Позначте точки A і B. Накресліть вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\overrightarrow{AB}$.

412.° Накресліть вектор $\vec{a}$ і позначте точки M і N. Відкладіть від цих точок вектори, рівні вектору $\vec{a}$.

413.• Накресліть трикутник ABC і позначте точку M — середину сторони BC. Від точки M відкладіть вектор, рівний вектору $\overrightarrow{AM}$, а від точки B — вектор, рівний вектору $\overrightarrow{AC}$. Доведіть, що кінці побудованих векторів збігаються.

414.• Накресліть трикутник ABC. Від точок B і C відкладіть вектори, відповідно рівні векторам $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$. Доведіть, що кінці побудованих векторів збігаються.

ВПРАВИ

415.° Укажіть рівні вектори, початки і кінці яких знаходяться у вершинах квадрата $ABCD$.

416.° У ромбі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Укажіть рівні вектори, початки і кінці яких знаходяться у точках A, B, C, D, O.

417.° Які з векторів, зображених на рисунку 97: 1) рівні; 2) співнапрямлені; 3) протилежно напрямлені; 4) колінеарні?

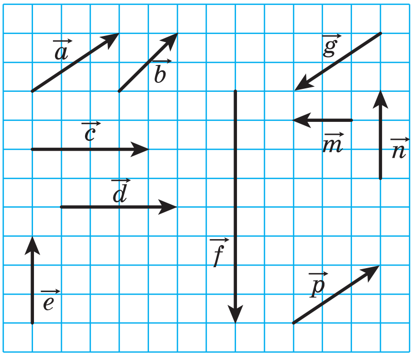


Рис. 97

418.° Точки M і N — відповідно середини сторін AB і CD паралелограма $ABCD$. Укажіть вектори, початки і кінці яких знаходяться в точках A, B, C, D, M, N: 1) рівні вектору $\overrightarrow{AM}$; 2) колінеарні вектору $\overrightarrow{CD}$; 3) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{NC}$; 4) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{BC}$.

419.° Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Укажіть вектори, початки і кінці яких знаходяться в точках A, B, C, D, O: 1) рівні; 2) співнапрямлені; 3) протилежно напрямлені.

420.° Точки M, N, P — відповідно середини сторін AB, BC, CA трикутника ABC. Укажіть вектори, початки і кінці яких знаходяться в точках A, B, C, M, N, P: 1) рівні вектору $\overrightarrow{MN}$; 2) колінеарні вектору $\overrightarrow{AB}$; 3) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{MP}$; 4) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{CA}$.

421.° Чи є правильним твердження:

1) якщо $\vec{m}=\vec{n}$, то $|\vec{m}|=|\vec{n}|$;

2) якщо $\vec{m}=\vec{n}$, то $\vec{m}\parallel\vec{n}$;

3) якщо $\vec{m}\neq\vec{n}$, то $|\vec{m}|\neq|\vec{n}|$?

422.° Доведіть, що коли чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

423.° Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{BC}\parallel\overrightarrow{DA}$.

424.° Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ колінеарні і $|\overrightarrow{BC}|\neq|\overrightarrow{AD}|$.

425.° Знайдіть модулі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 98), якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.

426.° У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, O — точка перетину діагоналей. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$.

427.° У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, $|\overrightarrow{AB}|=5$ см, $|\overrightarrow{AO}|=6{,}5$ см. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{AD}$.

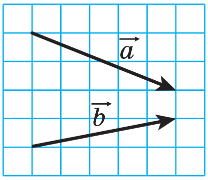


Рис. 98

428.° Відомо, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Чи правильно, що точки A, B, C і D є вершинами паралелограма?

429.° Відомо, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Які ще рівні вектори задають точки A, B, C і D?

430.° Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ і $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

431.° Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні і $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

432.° Що випливає з рівності $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$?

433.• У прямокутному трикутнику ABC точка M — середина гіпотенузи AB і $\angle B = 30°$. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MC}$, якщо $AC = 2$ см.

434.• У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) медіана CM дорівнює 6 см. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $\angle A = 30°$.

435.• Відомо, що вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ неколінеарні. Вектор $\vec{a}$ колінеарний кожному з векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Доведіть, що вектор $\vec{a}$ є нульовим.

436.• Відомо, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні. Доведіть, що точки A, B і C лежать на одній прямій. Чи правильне обернене твердження: якщо точки A, B і C лежать на одній прямій, то вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні?

437.• Для чотирьох точок A, B, C і D відомо, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Доведіть, що середини відрізків AD і BC збігаються. Доведіть обернене твердження: якщо середини відрізків AD і BC збігаються, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

438.• Відомо, що $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{ON}$. Доведіть, що точка O — середина відрізка MN. Доведіть обернене твердження: якщо точка O — середина відрізка MN, то $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{ON}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

439. Один з кутів паралелограма дорівнює півсумі трьох інших його кутів. Знайдіть кути паралелограма.

440. Периметр одного з двох подібних трикутників на 8 см більший за периметр другого трикутника. Знайдіть периметри даних трикутників, якщо коефіцієнт подібності дорівнює $\frac{1}{3}$.

441. На сторонах BC і AD ромба $ABCD$ позначено відповідно точки M і K такі, що $BM : MC = KD : AK = 1 : 2$. Знайдіть MK, якщо $AB = a$, $\angle ABC = 60^\circ$.

13. Координати вектора

Розглянемо на координатній площині вектор $\vec{a}$. Від початку координат відкладемо рівний йому вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 99). **Координатами вектора** $\vec{a}$ називатимемо координати точки A. Запис $\vec{a}(x; y)$ означає, що вектор $\vec{a}$ має координати $(x; y)$.

Числа x і y називають відповідно **першою** і **другою координатами вектора** $\vec{a}$.

З означення випливає, що **рівні вектори мають рівні відповідні координати**. Наприклад, кожний з рівних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 100) має координати (2; 1).

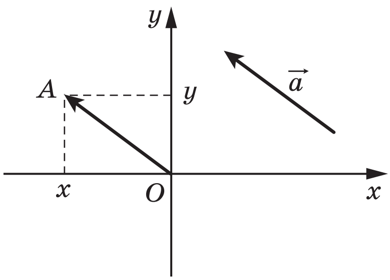


Рис. 99

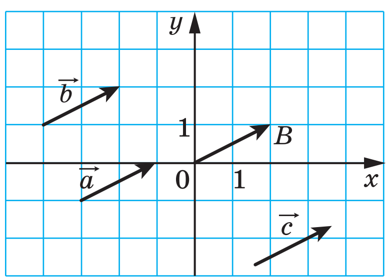


Рис. 100

Справедливе й обернене твердження: **якщо відповідні координати векторів рівні, то рівні й самі вектори**.

Справді, якщо відкласти такі вектори від початку координат, то їх кінці збігатимуться.

Очевидно, що нульовий вектор має координати (0; 0).

Теорема 13.1. ***Якщо точки $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$ відповідно є початком і кінцем вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ дорівнюють відповідно першій і другій координатам вектора $\vec{a}$.***

Доведення. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то теорема очевидна. Нехай тепер $\vec{a} \neq \vec{0}$. Відкладемо від початку координат вектор $\overrightarrow{OM}$, рівний вектору $\overrightarrow{AB}$. Якщо через $(a_1;\ a_2)$ позначити координати точки M, то треба довести рівності: $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, то, скориставшись результатом задачі 437, можемо зробити висновок, що середини відрізків OB і AM збігаються. Координати середин відрізків OB і AM відповідно дорівнюють $\left(\frac{0+x_2}{2};\ \frac{0+y_2}{2}\right)$ і $\left(\frac{x_1+a_1}{2};\ \frac{y_1+a_2}{2}\right)$. Тоді $\frac{0+x_2}{2} = \frac{x_1+a_1}{2}$, $\frac{0+y_2}{2} = \frac{y_1+a_2}{2}$. (Ці рівності виконуються і тоді, коли точка O збігається з точкою B або точка A збігається з точкою M.)

Звідси $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. ▲

З формули відстані між двома точками випливає, що коли вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1;\ a_2)$, то

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Приклад. Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCD$: $A\ (3;\ -2)$, $B\ (-4;\ 1)$, $C\ (-2;\ -3)$. Знайдіть координати вершини D.

Розв'язання. Оскільки чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Отже, координати цих векторів рівні.

Нехай координати точки D дорівнюють $(x;\ y)$. Для знаходження координат векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ скористаємось теоремою 13.1. Маємо:

$\overrightarrow{AB}\,(-4-3; 1-(-2)) = \overrightarrow{AB}\,(-7; 3)$; $\overrightarrow{DC}\,(-2-x; -3-y)$. Звідси:

$$\begin{cases} -7 = -2 - x, \\ 3 = -3 - y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = -6. \end{cases}$$

Відповідь: $D\ (5;\ -6)$.

1. Поясніть, що називають координатами даного вектора.
2. Що можна сказати про координати рівних векторів?
3. Що можна сказати про вектори, відповідні координати яких рівні?
4. Як знайти координати вектора, якщо відомо координати його початку і кінця?
5. Як знайти модуль вектора, якщо відомо його координати?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

442.° За допомогою циркуля і лінійки побудуйте точку, координати якої дорівнюють координатам даного вектора $\vec{a}$ (рис. 101).

443.° Відкладіть від початку координат вектори $\vec{a}\,(-3; 2)$, $\vec{b}\,(0; -2)$, $\vec{c}\,(4; 0)$.

444.° Відкладіть від точки $M\ (-1;\ 2)$ вектори $\vec{a}\,(1; -3)$, $\vec{b}\,(-2; 0)$, $\vec{c}\,(0; -1)$.

ВПРАВИ

445.° Знайдіть координати векторів, зображених на рисунку 102.

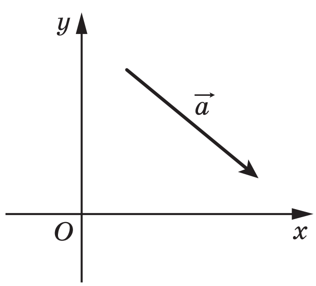


Рис. 101

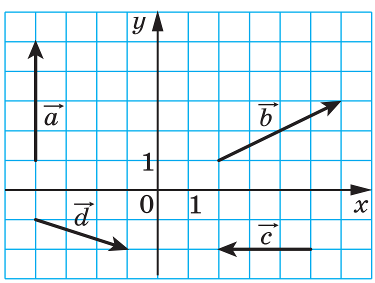


Рис. 102

446.° Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:
1) A (2; 3), B (−1; 4);
2) A (3; 0), B (0; −3);
3) A (0; 0), B (−2; −8);
4) A (m; n), B (p, k).

447.° Дано точку A (1; 3) і вектор $\vec{a}(-2; 1)$. Знайдіть координати точки B такої, що $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$.

448.° Дано точки A (3; −7), B (4; −5), C (5; 8). Знайдіть координати точки D такої, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

449.° Від точки A (4; −3) відкладено вектор $\vec{m}(-1; 8)$. Знайдіть координати кінця вектора.

450.° Дано точки A (3; −4), B (−2; 7), C (−4; 16), D (1; 5). Доведіть, що $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

451.° Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (1; −5), B (2; 3), C (−3; 1), D (−4; −7) є паралелограмом.

452.° Серед векторів $\vec{a}(3; -4)$, $\vec{b}(-4; 2)$, $\vec{c}\left(3; \sqrt{11}\right)$, $\vec{d}(-2; -4)$, $\vec{e}\left(-1; -2\sqrt{6}\right)$, $\vec{f}(-4; 5)$ знайдіть такі, що мають рівні модулі.

453.° Дано точки A (1; −4), B (−2; 5), C (1 + a; −4 + b), D (−2 + a; 5 + b). Доведіть, що $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$.

454.° Модуль вектора $\vec{a}(x; -8)$ дорівнює 10. Знайдіть x.

455.° При яких значеннях y модуль вектора $\vec{b}(12; y)$ дорівнює 13?

456.• Відрізок BM — медіана трикутника з вершинами A (3; −5), B (2; −3), C (−1; 7). Знайдіть координати і модуль вектора $\overrightarrow{BM}$.

457.• Точка F ділить сторону BC прямокутника $ABCD$ у відношенні 1 : 2, рахуючи від вершини B (рис. 103). Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AF}$ і $\overrightarrow{FD}$.

458.• Точка E — середина сторони AC прямокутника $OACD$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{DE}$ і $\overrightarrow{EO}$ (рис. 104).

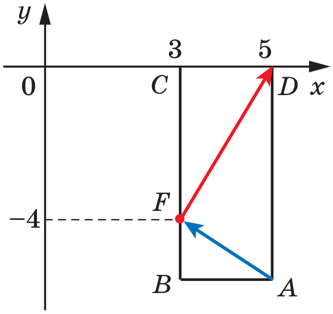


Рис. 103

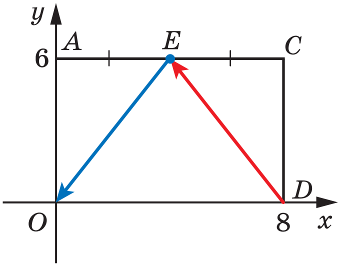


Рис. 104

459.• Модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює 10. Його перша координата на 2 більша за другу. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$.

460.• Модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює 2, а його координати рівні. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$.

461.•• Точки A (2; 5) і B (7; 5) — вершини прямокутника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ дорівнює 13. Знайдіть координати точок C і D.

462.•• Точки A (1; 2) і D (1; −6) — вершини прямокутника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{AC}$ дорівнює 17. Знайдіть координати вершин B і C.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

463. Два рівні рівнобедрені трикутники ADB і CBD ($AB = BD = CD$) мають спільну бічну сторону (рис. 105). Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

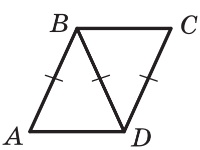


Рис. 105

464. Периметр трикутника дорівнює 48 см, а його бісектриса поділяє протилежну сторону на відрізки завдовжки 5 см і 15 см. Знайдіть сторони трикутника.

465. Бічна сторона рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює a, а один з кутів — $60°$. Знайдіть площу трапеції.

14. Додавання і віднімання векторів

Якщо тіло перемістилося з точки A в точку B, а потім із точки B в точку C, то сумарне переміщення з точки A в точку C природно подати у вигляді вектора $\overrightarrow{AC}$, вважаючи цей вектор сумою векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$, тобто $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 106).

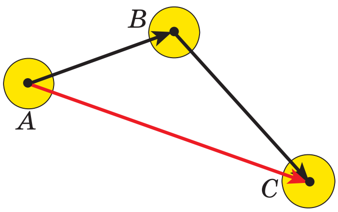


Рис. 106

Цей приклад підказує, як ввести поняття «сума векторів», тобто як додати два дані вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, *рівний вектору* $\vec{a}$. *Далі від точки B відкладемо вектор* $\overrightarrow{BC}$, *рівний вектору* $\vec{b}$. *Вектор* $\overrightarrow{AC}$ *називають* **сумою векторів** $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ (рис. 107) і записують $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

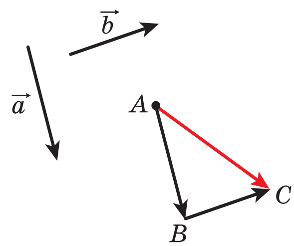


Рис. 107

Описаний алгоритм додавання двох векторів називають **правилом трикутника**.

Ця назва пов'язана з тим, що коли вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ не є колінеарними, то точки A, B і C є вершинами трикутника (рис. 107).

За правилом трикутника можна додавати й колінеарні вектори. На рисунку 108 вектор $\overrightarrow{AC}$ дорівнює сумі колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

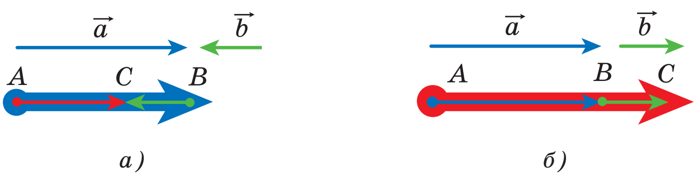


Рис. 108

Отже, ***для будь-яких трьох точок A, B і C виконується рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$,*** яка виражає **правило трикутника для додавання векторів.**

Теорема 14.1. ***Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно дорівнюють $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$, то координати вектора $\vec{a}+\vec{b}$ дорівнюють $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.***

Доведення. ⊙ Нехай точки $A\ (x_1; y_1)$, $B\ (x_2; y_2)$, $C\ (x_3; y_3)$ такі, що $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

Тоді $\vec{a}\,(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\vec{b}\,(x_3 - x_2; y_3 - y_2)$; $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{AC}\,(x_3 - x_1; y_3 - y_1) =$
$= \overrightarrow{AC}\,(x_3 - x_2 + x_2 - x_1; y_3 - y_2 + y_2 - y_1) = \overrightarrow{AC}\,(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$. ▲

Зауваження. Описуючи правило трикутника для знаходження суми векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, ми відклали вектор $\vec{a}$ від довільної точки. Якщо точку A замінити точкою A_1, то замість вектора $\overrightarrow{AC}$, який дорівнює сумі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, отримаємо деякий вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$. З теореми 14.1 випливає, що координати векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{A_1C_1}$ дорівнюють $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$, отже, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$. Це означає, що сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не залежить, від якої точки відкладено вектор $\vec{a}$.

Властивості додавання векторів аналогічні властивостям додавання чисел.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виконуються рівності:

1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переставна властивість);

3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сполучна властивість).

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати векторів, записаних у правій та лівій частинах рівностей. Зробіть це самостійно.

Суму трьох і більше векторів знаходять так: спочатку додають перший і другий вектори, потім до отриманого вектора додають третій вектор і т. д. Наприклад, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

З переставної і сполучної властивостей додавання векторів випливає, що при додаванні кількох векторів можна міняти місцями доданки і розставляти дужки у будь-який спосіб.

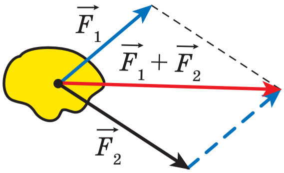


Рис. 109

У фізиці часто доводиться додавати вектори, відкладені від однієї точки. Так, якщо до тіла прикладено сили $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$ (рис. 109), то рівнодійна цих сил дорівнює сумі $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$.

Для знаходження суми двох неколінеарних векторів, відкладених від однієї точки, зручно користуватися **правилом паралелограма для додавання векторів.**

Нехай потрібно знайти суму неколінеарних векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ (рис. 110). Відкладемо вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\overrightarrow{AD}$. Тоді за правилом трикутника $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ рівні, то чотирикутник $ABCD$ — паралелограм з діагоналлю AC.

Наведені міркування дозволяють сформулювати правило паралелограма для додавання неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, *рівний вектору* $\vec{a}$, *і вектор* $\overrightarrow{AD}$, *рівний вектору* $\vec{b}$. *Побудуємо паралелограм* $ABCD$ (рис. 111). *Тоді шукана сума* $\vec{a}+\vec{b}$ *дорівнює вектору* $\overrightarrow{AC}$.

Означення. Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.

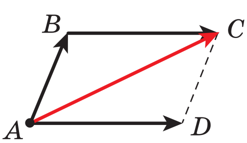


Рис. 110

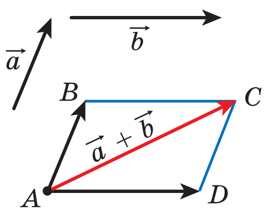


Рис. 111

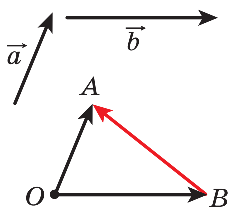


Рис. 112

Пишуть: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Покажемо, як побудувати вектор, рівний різниці заданих векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Від довільної точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 112). Тоді вектор $\overrightarrow{BA}$ буде різницею $\vec{a} - \vec{b}$. Справді, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$. Отже, за означенням різниці двох векторів $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$.

На рисунку 112 вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ неколінеарні. Проте описаний алгоритм можна застосовувати і для знаходження різниці колінеарних векторів. На рисунку 113 вектор $\overrightarrow{BA}$ дорівнює різниці колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Рис. 113

Отже, ***для будь-яких трьох точок O, A і B виконується рівність*** $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, яка виражає правило знаходження різниці двох векторів, відкладених від однієї точки.

Теорема 14.2. ***Якщо координати векторів*** $\vec{a}$ **і** $\vec{b}$ ***відповідно дорівнюють*** $(a_1; a_2)$ **і** $(b_1; b_2)$***, то координати вектора*** $\vec{a} - \vec{b}$ ***дорівнюють*** $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

Доведіть цю теорему самостійно.

З цієї теореми випливає, що для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ існує єдиний вектор $\vec{c}$ такий, що $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.

Означення. **Два ненульові вектори називають протилежними, якщо їх модулі рівні й вектори протилежно напрямлені.**

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежні, то кажуть, що вектор $\vec{a}$ **протилежний** вектору $\vec{b}$, а вектор $\vec{b}$ — протилежний вектору $\vec{a}$.

Вектором, протилежним нульовому вектору, вважають нульовий вектор.

Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначають так: $-\vec{a}$.

З означення випливає, що вектору $\overrightarrow{AB}$ протилежним є вектор $\overrightarrow{BA}$. Тоді ***для будь-яких точок A і B виконується рівність*** $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

З правила трикутника випливає, що

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

А з цієї рівності випливає, що коли вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $-\vec{a}$ має координати $(-a_1; -a_2)$.

Теорема 14.3. ***Для будь-яких векторів*** $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ ***виконується рівність*** $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Для доведення достатньо порівняти відповідні координати векторів, записаних у правій та лівій частинах рівності. Зробіть це самостійно.

Теорема 14.3 дозволяє звести віднімання векторів до додавання: *щоб від вектора* $\vec{a}$ *відняти вектор* $\vec{b}$, *можна до вектора* $\vec{a}$ *додати вектор* $-\vec{b}$ (рис. 114).

Приклад. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 115). Виразіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{CB}$ через вектори $\overrightarrow{CO} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

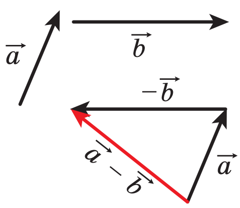


Рис. 114

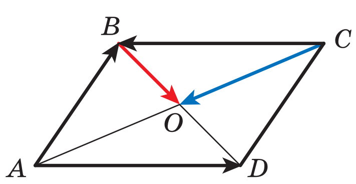


Рис. 115

Розв'язання. Оскільки точка O — середина відрізків BD і AC, то $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

Маємо: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BO}=-\vec{a}-\vec{b}$;

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a};$$

$$\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\vec{a}-\vec{b}.$$

1. Опишіть правило трикутника для знаходження суми векторів.
2. Яка рівність виражає правило трикутника для знаходження суми векторів?
3. Чому дорівнюють координати вектора, рівного сумі двох даних векторів?
4. Запишіть рівності, які виражають властивості додавання векторів.
5. Опишіть правило паралелограма для знаходження суми двох векторів.
6. Який вектор називають різницею двох векторів?
7. Яка рівність виражає правило знаходження різниці двох векторів, відкладених від однієї точки?
8. Чому дорівнюють координати вектора, рівного різниці двох даних векторів?
9. Які вектори називають протилежними?
10. Як позначають вектор, протилежний вектору $\vec{a}$?
11. Як можна звести віднімання векторів до додавання векторів?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

466.° За допомогою правила трикутника побудуйте суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 116.

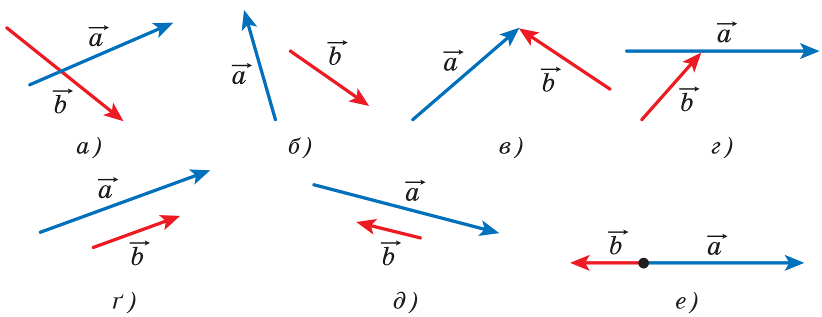


Рис. 116

467.° За допомогою правила паралелограма побудуйте суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 116, *а*)–*г*).

468.° Для векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 116, побудуйте вектор $\vec{a}-\vec{b}$.

469.° Накресліть трикутник ABC. Відкладіть від точки A вектор, протилежний вектору: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{BC}$.

470.° Накресліть паралелограм $ABCD$. Побудуйте вектори $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

471.° Накресліть трикутник MNP. Побудуйте вектори $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

472.° Накресліть паралелограм $ABCD$. Побудуйте вектори $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$.

473.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте вектори $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.

474.° Позначте чотири точки M, N, P, Q. Побудуйте вектор $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}$.

475.° Для векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, зображених на рисунку 117, побудуйте вектор: 1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 3) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

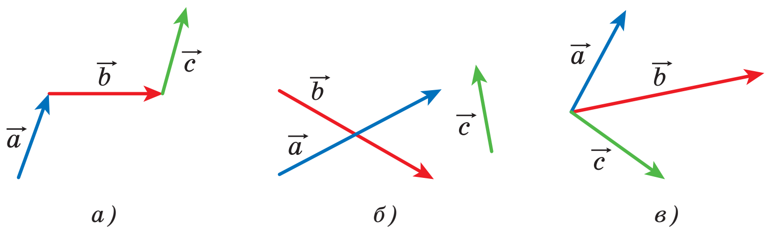


Рис. 117

476.• Відкладіть від однієї точки три вектори, модулі яких рівні, так, щоб сума двох із них дорівнювала третьому вектору.

477.• Відкладіть від однієї точки три вектори, модулі яких рівні, так, щоб їх сума дорівнювала нуль-вектору.

478.• Для точок A, B, C, D, зображених на рисунку 118, побудуйте такий вектор $\vec{x}$, що $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\vec{x}=\vec{0}$.

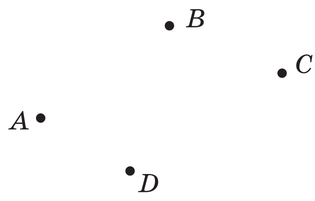


Рис. 118

479.• Накресліть трикутник ABC. Побудуйте таку точку X, що:

1) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{XC}$;

2) $\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XA}$.

ВПРАВИ

480.° Дано трикутник ABC. Виразіть вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектори:

1) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

481.° Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$.

482.° Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$ через вектори $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DA}=\vec{b}$.

483.° Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$.

484.° Доведіть, що для будь-яких точок A, B, C, D виконується рівність:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$;

3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

485.° Доведіть, що для будь-яких точок A, B, C, D виконується рівність:

1) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$;

3) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$.

486.° Точки M і N — середини відповідно сторін BA і BC трикутника ABC. Виразіть вектори $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NB}$ через вектори $\overrightarrow{BM}=\vec{m}$ і $\overrightarrow{BN}=\vec{n}$.

487.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Доведіть, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

488.° Дано чотирикутник $ABCD$ і деяку точку O. Відомо, що $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

489.° Дано чотирикутник $ABCD$ і деяку точку O. Відомо, що $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

490.° Дано вектори $\vec{a}\,(4; -5)$ і $\vec{b}\,(-1; 7)$. Знайдіть:

1) координати векторів $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$;

2) $|\vec{a}+\vec{b}|$, $|\vec{a}-\vec{b}|$.

491.° Дано точки A (1; −3), B (4; 5), C (−2; −1), D (3; 0). Знайдіть:

1) координати векторів $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$;

2) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|$, $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|$.

492.° Сума векторів $\vec{a}\,(5; -3)$ та $\vec{b}\,(x; 4)$ дорівнює вектору $\vec{c}\,(2; y)$. Знайдіть x та y.

493.° Сума векторів $\vec{a}\,(x; -1)$ та $\vec{b}\,(2; y)$ дорівнює вектору $\vec{c}\,(-3; 4)$. Знайдіть x та y.

494.° Дано вектор $\overrightarrow{MN}\,(3; -5)$. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{NM}$.

495.° Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 3 см. Знайдіть $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$.

496.° Катет рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) дорівнює 4 см. Знайдіть $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}|$.

497.° Дано точки N (3; −5) і F (4; 1). Знайдіть $|\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OF}|$ та $|\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{ON}|$, де O — довільна точка.

498.• Доведіть, що для будь-яких n точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ виконується рівність $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$.

499.• Доведіть, що для будь-яких точок A, B, C, D, E виконується рівність $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\vec{0}$.

500.• Виразіть вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (рис. 119).

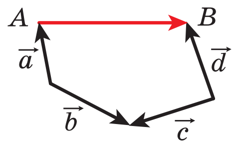


Рис. 119

501.• У паралелограмі $ABCD$ точки M, N, K — середини відповідно сторін AB, BC і CD. Виразіть вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{MN}=\vec{m}$ і $\overrightarrow{KN}=\vec{n}$.

502.• У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Виразіть вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{DO}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$.

503.• Дан чотирикутник $ABCD$. Доведіть, що $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{DA}$, де M — довільна точка.

504.• Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Доведіть, що $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}$, де M — довільна точка.

505.• Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Доведіть, що:

1) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

506.• У трикутнику ABC проведено медіану BM. Доведіть, що:

1) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$; 2) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

507.• Доведіть, що для неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

508.• Доведіть, що для неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $|\vec{a}-\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

509.•• Для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Доведіть, що $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

510.•• Для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Доведіть, що $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

511.•• Чи може бути нульовим вектором сума трьох векторів, модулі яких дорівнюють:

1) 5; 2; 3; 2) 4; 6; 3; 3) 8; 9; 18?

512.•• Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Відомо, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.

513.•• Вектори $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ і $\overrightarrow{EF}$ попарно неколінеарні, причому $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$. Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють відрізкам MN, PQ і EF.

514.•• Доведіть, що для паралелограма $ABCD$ і довільної точки X виконується рівність $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}$.

515.•• Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

516.•• Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}\right|=\left|\overrightarrow{BX}\right|$.

517.* Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M. Доведіть, що $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

518.* На сторонах трикутника ABC у зовнішній бік побудовано паралелограми AA_1B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_2A. Прямі A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 попарно непаралельні. Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють відрізкам A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

519. У трикутник ABC вписано паралелограм $CDMK$ так, що кут C у них спільний, а точки D, M і K належать відповідно сторонам AC, AB і BC трикутника. Знайдіть сторони паралелограма $CDMK$, якщо його периметр дорівнює 20 см, $AC = 12$ см, $BC = 9$ см.

520. Три кола, радіуси яких дорівнюють 1 см, 2 см і 3 см, попарно дотикаються зовнішньо одне до одного. Знайдіть радіус кола, яке проходить через центри даних кіл.

521. Доведіть, що площа правильного шестикутника, вписаного в коло, становить $\frac{3}{4}$ площі правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

15. Множення вектора на число

Нехай дано ненульовий вектор $\vec{a}$. На рисунку 120 зображено вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}+\vec{a}$, і вектор $\overrightarrow{CD}$, рівний вектору $(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$. Очевидно, що

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\left|\vec{a}\right| \text{ і } \overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\vec{a},$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|=3\left|\vec{a}\right| \text{ і } \overrightarrow{CD}\uparrow\downarrow\vec{a}.$$

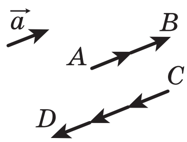


Рис. 120

Вектор $\overrightarrow{AB}$ природно позначити $2\vec{a}$ і вважати, що його отримано в результаті **множення вектора** $\vec{a}$ **на число** 2. Аналогічно можна вважати, що вектор $\overrightarrow{CD}$ отримано в результаті множення вектора $\vec{a}$ на число -3, і прийняти позначення $\overrightarrow{CD}=-3\vec{a}$.

Цей приклад підказує, як ввести поняття «множення вектора на число».

Означення. Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k, відмінного від нуля, називають такий вектор $\vec{b}$, що:

1) $\left|\vec{b}\right|=|k|\left|\vec{a}\right|$;

2) якщо $k>0$, то $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$; якщо $k<0$, то $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

Пишуть: $\vec{b}=k\vec{a}$.

Якщо $\vec{a}=\vec{0}$ або $k=0$, то вважають, що $k\vec{a}=\vec{0}$.

На рисунку 121 зображено вектори $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$, $\sqrt{3}\vec{a}$.

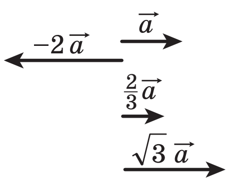


Рис. 121

З означення випливає, що

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a},$$

$$-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}.$$

Також з означення випливає, що ***коли $\vec{b}=k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.***

А якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то чи можна подати вектор $\vec{b}$ у вигляді добутку $k\vec{a}$? Відповідь дає така теорема.

Теорема 15.1. ***Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні й $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k, що $\vec{b} = k\vec{a}$.***

Доведення. Якщо $\vec{b} = \vec{0}$, то при $k = 0$ отримуємо, що $\vec{b} = k\vec{a}$.

Якщо $\vec{b} \neq \vec{0}$, то або $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, або $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

1) Нехай $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Розглянемо вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, де $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Оскільки $k > 0$, то $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, отже, $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Крім того, $|\vec{c}| = k\,|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Таким чином, вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ співнапрямлені і модулі їх рівні. Звідси $\vec{b} = \vec{c} = k\vec{a}$.

2) Нехай $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Розглянемо вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, де $k \quad \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Для цього випадку завершіть доведення самостійно. ▲

Теорема 15.2. ***Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ має координати $(ka_1; ka_2)$.***

Доведення. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $k = 0$, то твердження теореми очевидне.

Нехай $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $k \neq 0$. Розглянемо вектор $\vec{b}(ka_1; ka_2)$. Покажемо, що $\vec{b} = k\vec{a}$.

Маємо: $|\vec{b}| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2} = |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |k||\vec{a}|$.

Відкладемо від початку координат вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, рівні відповідно векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Оскільки пряма OA проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд $ax + by = 0$.

Цій прямій належить точка $A\ (a_1; a_2)$. Тоді $a \cdot a_1 + b \cdot a_2 = 0$. Звідси $a\ (ka_1) + b\ (ka_2) = 0$.

Отже, точка $B\ (ka_1; ka_2)$ теж належить прямій OA, тому вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ колінеарні, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

При $k > 0$ числа a_1 і ka_1 мають однакові знаки (або обидва дорівнюють нулю). Ту ж властивість мають числа a_2 і ka_2. Отже, при $k > 0$ точки A і B лежать в одній чверті (або на одному координатному промені), тому вектори $\overrightarrow{OA}$

і $\overrightarrow{OB}$ співнапрямлені (рис. 122), тобто $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. При $k < 0$ вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ будуть протилежно напрямленими, тобто $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Отже, ми отримали, що $\vec{b} = k\vec{a}$. ▲

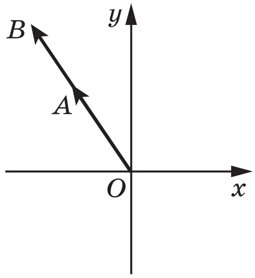


Рис. 122

Наслідок 1. ***Вектори*** $\boldsymbol{\vec{a}\,(a_1; a_2)}$ ***і*** $\boldsymbol{\vec{b}\,(ka_1; ka_2)}$ ***колінеарні.***

Наслідок 2. ***Якщо вектори*** $\boldsymbol{\vec{a}\,(a_1; a_2)}$ ***і*** $\boldsymbol{\vec{b}\,(b_1; b_2)}$ ***колінеарні, причому*** $\boldsymbol{\vec{a} \neq 0}$***, то існує таке число*** $\boldsymbol{k}$***, що*** $\boldsymbol{b_1 = ka_1}$ ***і*** $\boldsymbol{b_2 = ka_2}$.

За допомогою теореми 15.2 можна довести такі властивості множення вектора на число.

Для будь-яких чисел k, m і будь-яких векторів $\boldsymbol{\vec{a}}$, $\boldsymbol{\vec{b}}$ ***виконуються рівності:***

$\boldsymbol{(km)\vec{a} = k(m\vec{a})}$ (сполучна властивість);

$\boldsymbol{(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}}$ (перша розподільна властивість);

$\boldsymbol{k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}}$ (друга розподільна властивість).

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати векторів, записаних у правих і лівих частинах рівностей. Зробіть це самостійно.

Ці властивості дозволяють перетворювати вирази, які містять суму векторів, їх різницю і добуток вектора на число аналогічно тому, як ми це робимо в алгебрі. Наприклад, $2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$.

Задача 1. *Доведіть, що коли* $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$, *то точки O, A і B лежать на одній прямій.*

Розв'язання. З умови випливає, що вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ колінеарні. До того ж ці вектори відкладено від однієї точки O. Отже, точки O, A і B лежать на одній прямій.

Задача 2. *Нехай точка M — середина відрізка AB і X — довільна точка* (рис. 123). *Доведіть, що*

$$\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right).$$

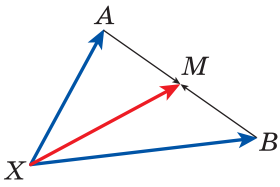


Рис. 123

Розв'язання. Застосовуючи правило трикутника, запишемо:

$$\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{AM};$$

$$\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{BM}.$$

Додамо ці дві рівності:

$$2\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}.$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BM}$ протилежні, то $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$. Маємо: $2\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}$. Звідси $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right)$.

Приклад 1. Доведіть, що середини основ трапеції і точка перетину продовжень її бічних сторін лежать на одній прямій.

Розв'язання. Нехай точки M і N — середини основ BC і AD трапеції $ABCD$, O — точка перетину прямих AB і CD (рис. 124).

Застосовуючи ключову задачу 2, запишемо:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right),$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right).$$

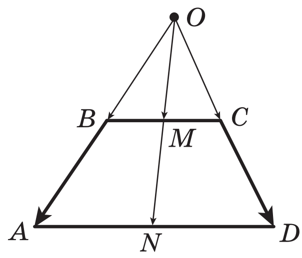


Рис. 124

Оскільки вектори в парах $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ колінеарні, то $\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OC}=k_1\overrightarrow{OD}$, де k і k_1 — деякі числа.

Оскільки $\triangle\ BOC \sim \triangle\ AOD$, то $\frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OD}$. Отже, $k=k_1$.

Маємо:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OD}\right)=k\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)=k\cdot\overrightarrow{ON}.$$

Із ключової задачі 1 випливає, що точки O, M, N лежать на одній прямій.

Приклад 2. Доведіть, що коли M — точка перетину медіан трикутника ABC, то $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Розв'язання[1]. Нехай відрізки AA_1, BB_1, CC_1 — медіани трикутника ABC (рис. 125). Маємо:

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right);$$

$$\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right);$$

$$\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right).$$

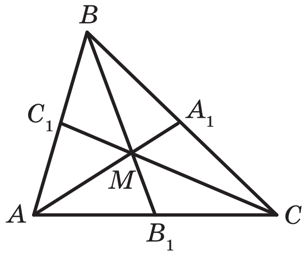


Рис. 125

Звідси

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}.$$

З властивості медіан трикутника випливає, що

$$AM=\frac{2}{3}AA_1. \text{ Тоді } \overrightarrow{MA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}.$$

Аналогічно $\overrightarrow{MB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$. Звідси

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}=-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right)=\vec{0}.$$

1. Що називають добутком ненульового вектора $\vec{a}$ на число $k \neq 0$?

2. Чому дорівнює добуток $k\vec{a}$, якщо $k=0$ або $\vec{a}=\vec{0}$?

3. Що можна сказати про ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{b}=k\vec{a}$, де k — деяке число?

4. Відомо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, причому $\vec{a} \neq \vec{0}$. Як можна виразити вектор $\vec{b}$ через вектор $\vec{a}$?

5. Вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1;\ a_2)$. Чому дорівнюють координати вектора $k\vec{a}$?

6. Що можна сказати про вектори, координати яких дорівнюють $(a_1;\ a_2)$ і $(ka_1;\ ka_2)$?

[1] У вказівці до задачі 517 наведено інший спосіб розв'язання цього прикладу.

7. Як пов'язані між собою відповідні координати колінеарних векторів $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1; b_2)$?

8. Запишіть сполучну і розподільні властивості множення вектора на число.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

522.° Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 126). Побудуйте вектор: 1) $2\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{c}$; 3) $\frac{2}{3}\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{6}\vec{a}$.

523.° Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 126). Побудуйте вектор: 1) $\frac{1}{2}\vec{a}$; 2) $-2\vec{b}$; 3) $-\frac{2}{3}\vec{c}$.

524.° Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 127). Побудуйте вектор: 1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$.

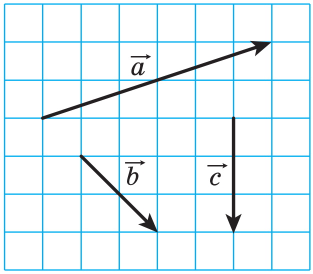


Рис. 126

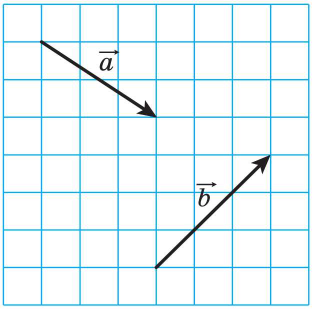


Рис. 127

525.° Побудуйте два неколінеарні вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$. Позначте яку-небудь точку O. Від точки O відкладіть вектори: 1) $3\vec{x}+\vec{y}$; 2) $\vec{x}+2\vec{y}$; 3) $-\frac{1}{2}\vec{x}+3\vec{y}$; 4) $-2\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

526.• Позначте на площині три точки A, B і C такі, що: 1) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

527.• Накресліть трикутник ABC. Позначте точку M — середину сторони AC.

1) Від точки M відкладіть вектор, рівний вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

2) Від точки B відкладіть вектор, рівний вектору

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

528.• Накресліть трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Позначте точку M — середину сторони AB. Від точки M відкладіть вектор, рівний вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

529.• Накресліть трикутник ABC. Побудуйте вектор, рівний вектору $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, так, щоб його початок належав стороні AB, а кінець — стороні BC.

ВПРАВИ

530.° Знайдіть модулі векторів $3\vec{m}$ та $-\frac{1}{2}\vec{m}$, якщо $|\vec{m}|=4$.

531.° Який із векторів, $3\vec{a}$ або $-\frac{1}{3}\vec{a}$, співнапрямлений із вектором $\vec{a}$, якщо $\vec{a}\neq\vec{0}$?

532.° Чи є ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнапрямленими або протилежно напрямленими, якщо: 1) $\vec{b}=2\vec{a}$; 2) $\vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{b}$; 3) $\vec{b}=\sqrt{2}\,\vec{a}$? Знайдіть відношення $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.

533.° Виразіть вектор $\vec{p}$ з рівності: 1) $\vec{q}=3\vec{p}$; 2) $\overrightarrow{AC}=-2\vec{p}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{p}=\vec{q}$; 4) $2\vec{p}=3\vec{q}$.

534.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Виразіть: 1) вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$; 2) вектор $\overrightarrow{BD}$ через вектор $\overrightarrow{BO}$; 3) вектор $\overrightarrow{CO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$.

535.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

536.° У паралелограмі $ABCD$ на діагоналі AC позначено точку M так, що $AM : MC = 1 : 3$. Виразіть вектор $\overrightarrow{MC}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, де $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

537.° У паралелограмі $ABCD$ точка M — середина сторони BC, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MD}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

538.° У трикутнику ABC точки M і N — середини сторін AB і BC відповідно. Виразіть: 1) вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CA}$; 2) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{MN}$.

539.° На відрізку AB завдовжки 18 см позначено точку C так, що $BC = 6$ см. Виразіть: 1) вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$; 2) вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$; 3) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{BC}$.

540.° Дано вектор $\vec{a}\,(-4; 2)$. Знайдіть координати і модулі векторів $3\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}$, $\frac{3}{2}\vec{a}$.

541.° Дано вектор $\vec{b}\,(-6; 12)$. Знайдіть координати і модулі векторів $2\vec{b}$, $-\frac{1}{6}\vec{b}$, $\frac{2}{3}\vec{b}$.

542.° Дано вектор $\vec{a}\,(3; -2)$. Які з векторів $\vec{b}\,(-3; -2)$, $\vec{c}\,(-6; 4)$, $\vec{d}\left(\frac{3}{2}; -1\right)$, $\vec{e}\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$, $\vec{f}\left(-3\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ колінеарні вектору $\vec{a}$?

543.° Дано вектори $\vec{a}\,(3; -3)$ і $\vec{b}\,(-16; 8)$. Знайдіть координати вектора: 1) $2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$; 3) $\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b}$.

544.° Дано вектори $\vec{m}\,(-2; 4)$ і $\vec{n}\,(3; -1)$. Знайдіть координати вектора: 1) $3\vec{m} + 2\vec{n}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{m} + 2\vec{n}$; 3) $\vec{m} - 3\vec{n}$.

545.• На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено відповідно точки M і N так, що $AM : MB = AN : NC = 1 : 2$. Виразіть вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CB}$.

546.• Точки O, A і B лежать на одній прямій. Доведіть, що існує таке число k, що $\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OB}$.

547.• На сторонах AB і BC паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки M і N так, що $AM : MB = 1 : 2$, $BN : NC = 2 : 1$. Виразіть вектор $\overrightarrow{NM}$ через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

548.• На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки E і F так, що $BE : EC = 3 : 1$, $CF : FD = 1 : 3$. Виразіть вектор $\overrightarrow{EF}$ через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

549.• Доведіть, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні, якщо A (1; 1), B (3; −2), C (−1; 3), D (5; −6).

550.• Серед векторів $\vec{a}(1; -2)$, $\vec{b}(-3; -6)$, $\vec{c}(-4; 8)$, $\vec{d}(-1; -2)$ укажіть пари колінеарних векторів.

551.• Дано вектори $\vec{m}(4; -6)$, $\vec{n}\left(-1; \frac{3}{2}\right)$, $\vec{k}\left(3; -\frac{9}{2}\right)$. Укажіть пари однаково напрямлених і протилежно напрямлених векторів.

552.• Знайдіть значення x, при яких вектори $\vec{a}(1; x)$ і $\vec{b}\left(\frac{x}{4}; 4\right)$ колінеарні.

553.• При яких значеннях y вектори $\vec{a}(2; 3)$ і $\vec{b}(-1; y)$ колінеарні?

554.• Дано вектор $\vec{b}(-3; 1)$. Знайдіть координати вектора, колінеарного вектору $\vec{b}$, модуль якого вдвічі більший за модуль вектора $\vec{b}$. Скільки розв'язків має задача?

555.• Знайдіть координати вектора $\vec{m}$, протилежно напрямленого вектору $\vec{n}(5; -12)$, якщо $|\vec{m}| = 39$.

556.• Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, співнапрямленого вектору $\vec{b}(-9; 12)$, якщо $|\vec{a}| = 5$.

557.• Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами A (−1; 2), B (3; 5), C (14; 6), D (2; −3) є трапецією.

558.• Доведіть, що точки A (−1; 3), B (4; −7), D (−2; 5) лежать на одній прямій.

559.• Дано вектори $\vec{a}(1; -4)$, $\vec{b}(0; 3)$, $\vec{c}(2; -17)$. Знайдіть такі числа x і y, що $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

560.•• У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. На стороні BC позначено точку K так, що $BK : KC = 2 : 3$. Виразіть вектор $\overrightarrow{OK}$ через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

561.•• Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O так, що $AO : OC = 1 : 2$, $BO : OD = 4 : 3$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

562.•• На сторонах AB і BC трикутника ABC позначено відповідно точки K і F так, що $AK : KB = 1 : 2$ і $BF : FC = 2 : 3$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{KF}$ через вектори $\overrightarrow{BK} = \vec{m}$, $\overrightarrow{CF} = \vec{n}$.

563.•• На сторонах AC і BC трикутника ABC позначено відповідно точки M і N так, що $AM : MC = 1 : 3$ і $BN : NC = 4 : 3$. Виразіть вектори $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NM}$ через вектори $\overrightarrow{BN} = \vec{k}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{p}$.

564.•• Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M. Виразіть вектор $\overrightarrow{BM}$ через вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$.

565.•• За допомогою векторів доведіть теорему про середню лінію трикутника.

566.•• Нехай точки M_1 і M_2 — середини відрізків A_1B_1 і A_2B_2 відповідно. Доведіть, що $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}\right)$.

567.•• Використовуючи задачу 566, доведіть теорему про середню лінію трапеції.

568.•• Нехай точки M і N — відповідно середини діагоналей AC і BD чотирикутника $ABCD$. Використовуючи задачу 566, доведіть, що $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$.

569.•• Нехай точки M і N — відповідно середини діагоналей AC і BD трапеції $ABCD$. Використовуючи задачу 566, доведіть, що $MN \parallel AD$.

570.•• На стороні AC трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : MC = 2 : 3$. Доведіть, що $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

571.•• На стороні BC трикутника ABC позначено точку D так, що $BD : DC = 1 : 2$. Доведіть, що $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

572.* Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють медіанам даного трикутника.

573.* Нехай точки M_1 і M_2 — середини відрізків A_1B_1 і A_2B_2 відповідно. Доведіть, що середини відрізків A_1A_2, M_1M_2, B_1B_2 лежать на одній прямій.

574.* На стороні AD і на діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки M і N так, що $AM = \frac{1}{5}AD$ і $AN = \frac{1}{6}AC$. Доведіть, що точки M, N і B лежать на одній прямій.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

575. Менша основа рівнобічної трапеції завдовжки 12 см дорівнює бічній стороні. Чому дорівнює середня лінія трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 60°?

576. Діагоналі паралелограма дорівнюють 6 см і 16 см, а одна зі сторін — 7 см. Знайдіть кут між діагоналями паралелограма та його площу.

577. Знайдіть довжину хорди кола радіуса R, кінці якої розбивають це коло на дві дуги, довжини яких відносяться як 2 : 1.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Застосування векторів

При застосуванні векторів до розв'язування задач часто використовують таку лему.

Лема. ***Нехай M — така точка відрізка AB, що*** $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$ (рис. 128). ***Тоді для будь-якої точки X виконується рівність:***

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$

Доведення. Маємо: $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AM}$.

Оскільки $AM = \frac{m}{m+n}AB$, то $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Запишемо $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$, то маємо:

$$\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}\right); \quad \overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB};$$

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}. \quad \blacktriangle$$

Зауважимо, що ця лема є узагальненням ключової задачі 2 пункту 15.

Приклад 1. Нехай M — точка перетину медіан трикутника ABC і X — довільна точка (рис. 129). Доведіть, що $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$.

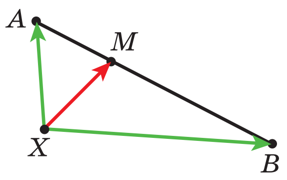


Рис. 128

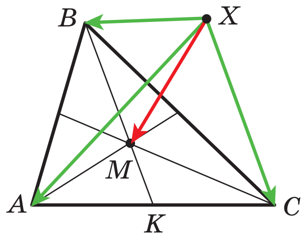


Рис. 129

Розв'язання. Нехай K — середина відрізка AC. Маємо: $BM : MK = 2 : 1$. Тоді, використовуючи лему, можна записати

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right).$$

Доведемо одну векторну рівність, яка пов'язує дві чудові[1] точки трикутника.

Теорема. ***Якщо точка H — ортоцентр трикутника ABC, а точка O — центр його описаного кола, то***

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \qquad (*)$$

Доведення. Опустимо з точки O перпендикуляр OK на сторону AC трикутника ABC (рис. 130). У курсі геометрії 8 класу було доведено, що $BH = 2OK$ (с. 109).

На промені OK позначимо точку P таку, що $OK = KP$. Тоді $BH = OP$. Оскільки $BH \parallel OP$, то чотирикутник $HBOP$ — паралелограм.

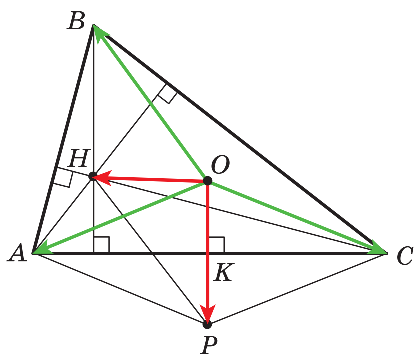


Рис. 130

За правилом паралелограма $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}$.

Оскільки точка K є серединою відрізка AC, то в чотирикутнику $AOCP$ діагоналі точкою перетину діляться навпіл. Отже, цей чотирикутник — паралелограм. Звідси $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

Маємо: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. ▲

Звернемося до векторної рівності $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$, де M — точка перетину медіан трикутника ABC. Оскільки

[1] Про чудові точки трикутника див. у підручнику «Геометрія. 8 клас», с. 108–110.

X — довільна точка, то рівність залишається правильною, якщо за точку X обрати точку O — центр описаного кола трикутника ABC.

Маємо: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Беручи до уваги рівність (*), отримуємо: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}$.

Ця рівність означає, що точки O, M і H лежать на одній прямій, яку називають **прямою Ейлера**. Нагадаємо, що цю чудову властивість було доведено в підручнику 8 класу (с. 110), але в інший спосіб.

16. Скалярний добуток векторів

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — два ненульові і неспівнапрямлені вектори (рис. 131). Від довільної точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Величину кута AOB називатимемо **кутом між векторами** $\vec{a}$ **і** $\vec{b}$.

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Наприклад, на рисунку 131 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, а на рисунку 132 $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 180^\circ$.

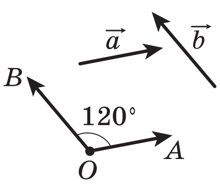


Рис. 131

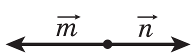


Рис. 132

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнапрямлені, то вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$. Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то також вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$.

Отже, для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має місце нерівність:

$$0^\circ \leqslant \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant 180^\circ.$$

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°. Пишуть: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Ви вмієте додавати і віднімати вектори, множити вектор на число. Також із курсу фізики ви знаєте, що коли під впливом постійної сили $\vec{F}$ тіло перемістилося з точки A в точку B (рис. 133), то здійснена механічна робота дорівнює $|\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, де $\varphi = \angle(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$.

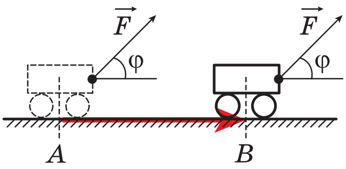


Рис. 133

Цей факт підказує, що доцільно ввести ще одну дію над векторами.

Означення. Скалярним добутком двох векторів називають добуток їх модулів і косинуса кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Маємо: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то очевидно, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Нехай $\vec{a} = \vec{b}$. Тоді $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0° = |\vec{a}|^2$.

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називають **скалярним квадратом** вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}^2$.

Отже, ми отримали, що $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, тобто ***скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля.***

Теорема 16.1. ***Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.***

Доведення. ⊙ Нехай $\vec{a} \perp \vec{b}$. Тоді $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$ і $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90° = 0$.

Нехай тепер $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Тоді $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Оскільки $|\vec{a}| \neq 0$ і $|\vec{b}| \neq 0$, то $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Звідси $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, тобто $\vec{a} \perp \vec{b}$. ▲

Теорема 16.2. ***Скалярний добуток векторів*** $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ ***і*** $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ ***можна обчислити за формулою:***

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні.

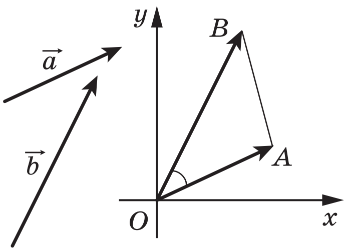


Рис. 134

Відкладемо від початку координат вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 134). Отримуємо, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle AOB$.

Застосуємо теорему косинусів до трикутника AOB:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB.$$

Звідси $OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2)$.

Оскільки $|\vec{a}| = OA$ і $|\vec{b}| = OB$, то $OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Крім того, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$. Звідси $\overrightarrow{AB}\,(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$.

Маємо: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2\right)$. Скориставшись формулою знаходження модуля вектора за його координатами, запишемо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left((a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2\right).$$

Спрощуючи вираз, який записано в правій частині останньої рівності, отримуємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $\vec{b} = \vec{0}$, то формула, яку доводимо, є правильною. Розглянемо випадок, коли $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$. Тоді існує таке число k, що $\vec{b} = k\vec{a}$, тобто $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$.

Розглянемо випадок, коли $k > 0$. Тоді $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

Маємо: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(k\vec{a}\right)=\left|\vec{a}\right|\left|k\vec{a}\right|\cos 0°=\left|k\right|\left|\vec{a}\right|^2=$

$$=k\left(a_1^2+a_2^2\right)=a_1\cdot ka_1+a_2\cdot ka_2=a_1b_1+a_2b_2.$$

Випадок, коли $k<0$, розгляньте самостійно. ▲

Наслідок. ***Косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a}(a_1;a_2)$ і $\vec{b}(b_1;b_2)$ можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}}\qquad (*)$$

Доведення. ⊙ З означення скалярного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ випливає, що $\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$. Скориставшись теоремою 16.2 і формулою знаходження модуля вектора за його координатами, отримуємо формулу (*). ▲

За допомогою теореми 16.2 легко довести такі властивості скалярного добутку векторів.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і будь-якого числа k виконуються рівності:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a};$$

$$\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right);$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Для доведення цих властивостей достатньо виразити через координати векторів скалярні добутки, записані в правих і лівих частинах рівностей. Зробіть це самостійно.

Ці властивості разом з властивостями додавання векторів і множення вектора на число дозволяють перетворювати вирази, які містять скалярний добуток векторів, за звичними правилами, які ви знаєте з курсу алгебри. Наприклад,

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}+\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\overrightarrow{a^2}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\overrightarrow{b^2}=$$

$$=\overrightarrow{a^2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\overrightarrow{b^2}.$$

Приклад 1. За допомогою векторів доведіть, що діагоналі ромба перпендикулярні.

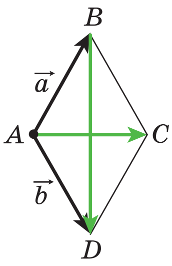


Рис. 135

Розв'язання. На рисунку 135 зображено ромб $ABCD$. Нехай $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Очевидно, що $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. За правилом паралелограма маємо: $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\overrightarrow{BD}=-\vec{a}+\vec{b}$. Звідси $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(-\vec{a}+\vec{b})=\vec{b}^2-\vec{a}^2=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=0$. Отже, $AC\perp BD$.

Приклад 2. Відомо, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=120°$. Знайдіть $|2\vec{a}-3\vec{b}|$.

Розв'язання. Оскільки скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, то

$$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})^2. \text{ Звідси } |2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{(2\vec{a}-3\vec{b})^2}=$$

$$=\sqrt{4\vec{a}^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2}=\sqrt{4|\vec{a}|^2-12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})+9|\vec{b}|^2}=$$

$$=\sqrt{36+18+9}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}.$$

Приклад 3. У трикутнику ABC $AB=4$ см, $BC=6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC=30°$. Знайдіть довжину медіани BM.

Розв'язання. Застосовуючи ключову задачу 2 п. 15, запишемо $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$ (рис. 136). Звідси

$$\overrightarrow{BM}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{BA}|^2+2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\angle ABC+|\overrightarrow{BC}|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(16+48\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+108\right)=49.$$

Отже, $BM^2=49$; $BM=7$ см.

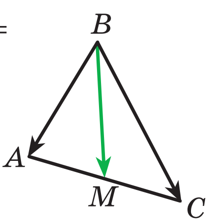


Рис. 136

1. Опишіть, як можна побудувати кут між двома ненульовими і неспівнапрямленими векторами.
2. Чому дорівнює кут між двома співнапрямленими векторами?
3. Чому дорівнює кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо хоча б один із них нульовий?
4. Як позначають кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$?
5. У яких межах змінюється кут між будь-якими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$?
6. Які вектори називають перпендикулярними?
7. Що називають скалярним добутком двох векторів?
8. Що називають скалярним квадратом вектора?
9. Чому дорівнює скалярний квадрат вектора?
10. Сформулюйте умову перпендикулярності двох ненульових векторів.
11. Що випливає з рівності $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$?
12. Як знайти скалярний добуток векторів, якщо відомо їх координати?
13. Запишіть властивості скалярного добутку векторів.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

578.° Побудуйте кут, величина якого дорівнює куту між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 137).

579.° Побудуйте кут, величина якого дорівнює куту між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$ (рис. 138).

580.° На рисунку 139 зображено вектор $\vec{a}$ (довжина сторони клітинки дорівнює 0,5 см). Відкладіть від точки A вектор $\vec{b}$ такий, що $|\vec{b}| = 3$ см і $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Скільки розв'язків має задача?

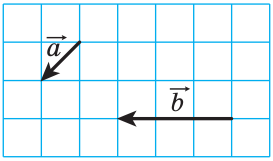


Рис. 137

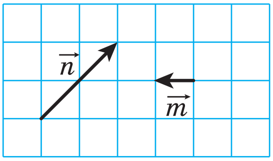


Рис. 138

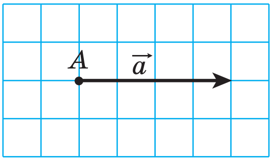


Рис. 139

ВПРАВИ

581.° На рисунку 140 зображено рівносторонній трикутник ABC, медіани якого AM і BK перетинаються в точці F. Знайдіть кут між векторами: 1) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AM}$; 4) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AM}$; 5) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BK}$; 6) $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BK}$; 7) $\overrightarrow{CF}$ і $\overrightarrow{AB}$.

582.° На рисунку 141 зображено квадрат $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Знайдіть кут між векторами: 1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DA}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CA}$; 4) $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{CB}$; 5) $\overrightarrow{BO}$ і $\overrightarrow{CD}$.

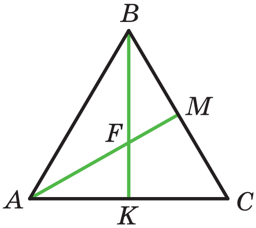


Рис. 140

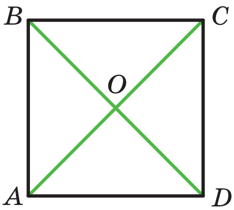


Рис. 141

583.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=5,\ \angle(\vec{a},\vec{b})=60°$;

2) $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2\sqrt{2},\ \angle(\vec{a},\vec{b})=135°$;

3) $|\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=1,\ \angle(\vec{a},\vec{b})=0°$;

4) $|\vec{a}|=\frac{1}{2},\ |\vec{b}|=6,\ \angle(\vec{a},\vec{b})=180°$;

5) $|\vec{a}|=0{,}3,\ |\vec{b}|=0,\ \angle(\vec{a},\vec{b})=137°$.

584.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо:

1) $|\vec{m}|=7\sqrt{2},\ |\vec{n}|=4,\ \angle(\vec{m},\vec{n})=45°$;

2) $|\vec{m}|=8,\ |\vec{n}|=\sqrt{3},\ \angle(\vec{m},\vec{n})=150°$.

585.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(2; -1)$, $\vec{b}(1; -3)$;
3) $\vec{a}(1; -4)$, $\vec{b}(8; 2)$.
2) $\vec{a}(-5; 1)$, $\vec{b}(2; 7)$;

586.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо:

1) $\vec{m}(3; -2)$, $\vec{n}(1; 0)$;
2) $\vec{m}\left(\frac{3}{2}; -1\right)$, $\vec{n}(6; 9)$.

587.° На рисунку 142 зображено ромб $ABCD$, у якому $AB = 6$ см, $\angle ABC = 120°$. Знайдіть скалярний добуток векторів: 1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$; 4) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{DA}$; 5) $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{AC}$; 6) $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{DC}$; 7) $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{AD}$.

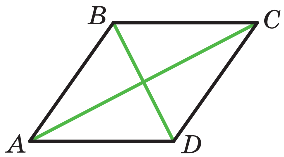


Рис. 142

588.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $CB = 2$ см. Знайдіть скалярний добуток векторів: 1) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{BA}$.

589.° Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}(1; -2)$ і $\vec{b}(2; -3)$.

590.° Який знак має скалярний добуток векторів, якщо кут між ними: 1) гострий; 2) тупий?

591.° Відомо, що скалярний добуток векторів є: 1) додатним числом; 2) від'ємним числом. Визначте вид кута між векторами.

592.• У рівносторонньому трикутнику ABC, сторона якого дорівнює 1, медіани AA_1 і BB_1 перетинаються в точці M. Обчисліть:

1) $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1}$;
2) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MA_1}$.

593.• Нехай O — центр правильного шестикутника $ABCDEF$, сторона якого дорівнює 1. Обчисліть:

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$;
2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{ED}$;
4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$.

594.• При якому значенні x вектори $\vec{a}(3; x)$ і $\vec{b}(1; 9)$ перпендикулярні?

595.• Відомо, що $x \neq 0$ і $y \neq 0$. Доведіть, що вектори $\vec{a}(-x; y)$ і $\vec{b}(y; x)$ перпендикулярні.

596.$^{\bullet}$ При яких значеннях x вектори $\vec{a}(2x; -3)$ і $\vec{b}(x; 6)$ перпендикулярні?

597.$^{\bullet}$ При якому значенні y скалярний добуток векторів $\vec{a}(4; y)$ і $\vec{b}(3; -2)$ дорівнює 14?

598.$^{\bullet}$ При яких значеннях x кут між векторами $\vec{a}(2; 5)$ і $\vec{b}(x; 4)$: 1) гострий; 2) тупий?

599.$^{\bullet}$ Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, колінеарного вектору $\vec{a}(3; -4)$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = -100$.

600.$^{\bullet}$ Відомо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні та $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$. При яких значеннях x вектори $\vec{a} + x\vec{b}$ та $\vec{a} - x\vec{b}$ перпендикулярні?

601.$^{\bullet}$ Вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярні. Доведіть, що $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

602.$^{\bullet}$ Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45°$. Знайдіть скалярний добуток $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}$.

603.$^{\bullet}$ Знайдіть скалярний добуток $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$.

604.$^{\bullet}$ Відомо, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150°$. Знайдіть $|2\vec{a} + 5\vec{b}|$.

605.$^{\bullet}$ Відомо, що $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 60°$. Знайдіть $|2\vec{m} - 3\vec{n}|$.

606.$^{\bullet}$ Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами A (3; −2), B (4; 0), C (2; 1), D (1; −1) є прямокутником.

607.$^{\bullet}$ Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами A (−1; 4), B (−2; 5), C (−1; 6), D (0; 5) є квадратом.

608.$^{\bullet}$ Знайдіть косинуси кутів трикутника з вершинами A (1; 6), B (−2; 3), C (2; −1).

609.$^{\bullet}$ Знайдіть кути трикутника з вершинами A (0; 6), $B(4\sqrt{3}; 6)$, $C(3\sqrt{3}; 3)$.

610.$^{\bullet}$ Доведіть, що для будь-яких двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $-|\vec{a}||\vec{b}| \leqslant \vec{a} \cdot \vec{b} \leqslant |\vec{a}||\vec{b}|$.

611.° Визначте взаємне розміщення двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$.

612.•• Знайдіть кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо $(\vec{m}+3\vec{n})\cdot(\vec{m}-\vec{n})=-11$, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$.

613.•• Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=\frac{3}{2}$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$.

614.•• У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = 1$, $BC=\sqrt{2}$. Доведіть, що медіани AK і CM перпендикулярні.

615.•• У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перпендикулярні та перетинаються в точці O. Відомо, що $OB = OC = 1$, $OA = 2$, $OD = 3$. Знайдіть кут між прямими AB і DC.

616.•• У трикутнику ABC проведено медіану BD. Відомо, що $\angle DBC = 90°$, $BD=\frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Знайдіть $\angle ABD$.

617.* На сторонах AB і BC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано квадрати $ABMN$ і $BCKF$. Доведіть, що медіана BD трикутника ABC перпендикулярна прямій MF.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

618. Точка M — середина діагоналі AC опуклого чотирикутника $ABCD$ (рис. 143). Доведіть, що чотирикутники $ABMD$ і $CBMD$ рівновеликі.

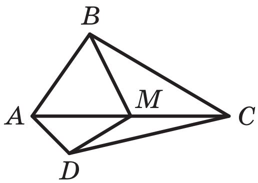


Рис. 143

619. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба, ділить його сторону на відрізки, один з яких на 7 см більший за другий. Знайдіть периметр ромба, якщо його висота дорівнює 24 см.

620. На висоті правильного трикутника зі стороною $6\sqrt{3}$ см як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги цього кола, яка розташована поза трикутником.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 4

1. Яка з наведених величин є векторною?

А) маса; Б) об'єм; В) швидкість; Г) час.

2. Чому дорівнює модуль вектора, початок і кінець якого збігаються?

А) 1; Б) –1; В) 5; Г) 0.

3. Дано паралелограм $ABCD$. Яка з рівностей є правильною?

А) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; Б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; В) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$; Г) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

4. Відомо, що $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Яке з даних тверджень є правильним?

А) точка B — середина відрізка AM;
Б) точка A — середина відрізка MB;
В) точка M — середина відрізка AB;
Г) точка M — вершина рівнобедреного трикутника AMB.

5. Дано точки A (–3; 4), B (1; –8). Точка M — середина відрізка AB. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AM}$.

А) (2; –6); Б) (–2; 6); В) (–2; –6); Г) (6; –2).

6. При якому значенні x вектори $\vec{a}(x; 2)$ і $\vec{b}(-4; 8)$ колінеарні?

А) –1; Б) 1; В) 0; Г) $\frac{1}{2}$.

7. Яка з даних рівностей є правильною?

А) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$; В) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$;
Б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$; Г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$.

8. Дано вектор $\vec{a}\left(\sqrt{3}; -2\right)$. Який із векторів дорівнює вектору $\sqrt{3}\,\vec{a}$?

А) $\vec{m}\left(1; -2\sqrt{3}\right)$; В) $\vec{p}\,(3; -2)$;
Б) $\vec{n}\left(-3; -2\sqrt{3}\right)$; Г) $\vec{q}\left(3; -2\sqrt{3}\right)$.

9. Точка M — середина сторони BC трикутника ABC. Яка з даних рівностей є правильною?

А) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$;
В) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;
Б) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;
Г) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

10. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(2;-3)$ і $\vec{b}(3;-2)$.

А) 12; Б) −12; В) 0; Г) 6.

11. При якому значенні x вектори $\vec{a}(2x;-3)$ і $\vec{b}(1;4)$ перпендикулярні?

А) −6; Б) 3; В) 12; Г) 6.

12. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}(5;-12)$ і $\vec{b}(-3;4)$.

А) $\frac{63}{65}$; Б) $\frac{65}{63}$; В) $-\frac{63}{65}$; Г) $\frac{1}{2}$.

ПІДСУМКИ

У ЦЬОМУ ПАРАГРАФІ:

- було введено такі поняття:
  - напрямлені відрізки;
  - вектор;
  - нульовий вектор;
  - модуль вектора;
  - колінеарні вектори;
  - рівні вектори;
  - координати вектора;
  - сума і різниця векторів;
  - множення вектора на число;
  - кут між двома векторами;
  - скалярний добуток векторів;
- ви вивчили:
  - правила трикутника і паралелограма для додавання двох векторів;
  - правило віднімання двох векторів;
  - умови колінеарності двох векторів;
  - властивості додавання векторів і множення вектора на число;
  - умову перпендикулярності двох векторів;
- ви навчилися застосовувати вектори для розв'язування задач.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 9 КЛАСУ

1. Розв'язування трикутників

882. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 10 см, а синус кута між ними дорівнює $\frac{4}{5}$. Знайдіть третю сторону трикутника.

883. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 2$ см, $AD = 4$ см, $\angle BAD = 60^\circ$. Знайдіть косинус кута між прямими AC і BD.

884. Установіть, гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник зі сторонами: 1) 4 см, 4 см, 5 см; 2) 5 см, 6 см, 9 см; 3) 5 см, 12 см, 13 см.

885. Одна із сторін трикутника дорівнює 21 см, а дві інші сторони відносяться як 3 : 8. Знайдіть невідомі сторони трикутника, якщо кут між ними дорівнює 60°.

886. Одна із сторін трикутника дорівнює 3 см, а друга сторона — $\sqrt{7}$ см, причому кут, протилежний другій стороні, дорівнює 60°. Знайдіть невідому сторону трикутника.

887. Одна із сторін паралелограма на 4 см більша за другу, а його діагоналі дорівнюють 12 см і 14 см. Знайдіть периметр паралелограма.

888. У паралелограмі $ABCD$ $AD = a$, $BD = d$, $BD \perp AD$. Знайдіть діагональ AC.

889. У трапеції $ABCD$ $BC \parallel AD$, $AD = 8$ см, $CD = 4\sqrt{3}$ см. Коло, яке проходить через точки A, B і C, перетинає пряму AD у точці K, $\angle AKB = 60^\circ$. Знайдіть BK.

890. Основи трапеції дорівнюють 3 см і 7 см, а бічні сторони — 6 см і 5 см. Знайдіть косинуси кутів трапеції.

891. Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається до сторони AB у точці D, $BD = 1$ см, $AD = 5$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Знайдіть CD.

892. Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 12 см і 13 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до його більшої сторони.

893. Знайдіть бісектрису трикутника, яка поділяє його сторону на відрізки завдовжки 3 см і 4 см та утворює з цією стороною кут, що дорівнює 60°.

894. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $BD = a$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 75^\circ$. Знайдіть AD.

895. Знайдіть відношення сторін рівнобедреного трикутника, один з кутів якого дорівнює 120°.

896. У трикутнику ABC $AC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC = 60^\circ$. Знайдіть радіус кола, яке проходить через центр вписаного кола трикутника ABC та точки A і C.

897. Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 8 см, а кут між ними — 60°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного трикутника.

898. Знайдіть бісектрису трикутника ABC, проведену з вершини A, якщо $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$.

899. Бісектриса кута BAD паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M. Знайдіть площу трикутника ABM, якщо $AB = 4$ см, $\angle BAD = 60^\circ$.

900. Знайдіть найбільшу висоту, радіуси вписаного і описаного кіл трикутника зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см.

901. Радіуси двох кіл дорівнюють 17 см і 39 см, а відстань між їх центрами — 44 см. Знайдіть довжину спільної хорди даних кіл.

902. Обчисліть площу паралелограма, одна із сторін якого дорівнює 15 см, а діагоналі — 11 см і 25 см.

903. Основи трапеції дорівнюють 16 см і 44 см, а бічні сторони — 17 см і 25 см. Знайдіть площу трапеції.

904. Основи трапеції дорівнюють 5 см і 12 см, а діагоналі — 9 см і 10 см. Знайдіть площу трапеції.

2. Правильні многокутники

905. Знайдіть площу правильного n-кутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює 6 см, а n дорівнює: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

906. У коло вписано квадрат зі стороною 4 см. Знайдіть площу правильного трикутника, вписаного у це саме коло.

907. Знайдіть відношення площ правильних трикутника і шестикутника, вписаних в одне й те саме коло.

908. Середини сторін правильного дванадцятикутника з'єднано через одну так, що отриманою фігурою є правильний шестикутник. Знайдіть сторону даного дванадцятикутника, якщо сторона утвореного шестикутника дорівнює a.

909. Довжина дуги кола дорівнює 6π см, а її градусна міра — 24°. Знайдіть радіус кола.

910. На катеті AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги цього кола, яка міститься поза трикутником і відтинається гіпотенузою AB, якщо $\angle A = 42^\circ$, $AC = 8$ см.

911. Сторона квадрата дорівнює $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть довжину дуги описаного кола даного квадрата, кінцями якої є дві його сусідні вершини.

912. Відстань між центрами двох кругів радіуса R дорівнює R. Знайдіть площу фігури, яка є спільною частиною цих кругів, і довжину лінії, яка обмежує цю фігуру.

913. Площа кругового сектора дорівнює $2{,}4\pi$ см^2. Знайдіть градусну міру дуги цього сектора, якщо радіус круга дорівнює 4 см.

914. Діаметр колеса вагона метрополітену дорівнює 78 см. За 2,5 хв колесо робить 1000 обертів. Знайдіть швидкість поїзда метро в кілометрах за годину. Відповідь округліть до десятих.

915. Знайдіть довжину кола, вписаного в сегмент, довжина дуги якого дорівнює m, а градусна міра дорівнює 120°.

916. До кола, радіус якого дорівнює R, проведено дві дотичні, кут між якими дорівнює 60°. Знайдіть площу фігури, обмеженої дотичними і меншою з дуг, кінцями яких є точки дотику.

3. Декартові координати на площині

917. Вершинами трикутника є точки $A\ (-4;\ 1)$, $B\ (-2;\ 4)$ і $C\ (0;\ 1)$. Доведіть, що $\Delta\ ABC$ — рівнобедрений, і знайдіть його площу.

918. Знайдіть координати точки перетину серединного перпендикуляра відрізка AB з віссю абсцис, якщо $A\ (5;\ -3)$, $B\ (4;\ 6)$.

919. Знайдіть координати точки перетину серединного перпендикуляра відрізка CD з віссю ординат, якщо $C\ (2;\ 1)$, $D\ (4;\ -3)$.

920. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (−12; 6), B (0; 11), C (5; −1), D (−7; −6) є квадратом.

921. Точка M (5; −2) є одним з кінців діаметра кола, точка N (2; 0) — центр кола. Знайдіть координати другого кінця діаметра.

922. Установіть, чи лежать точки A (−4; −3), B (26; 7), C (2; −1) на одній прямій. У разі позитивної відповіді укажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

923. Доведіть, що трикутник, вершинами якого є точки A (5; 1), B (9; −2), C (7; 2), — прямокутний, і складіть рівняння кола, описаного навколо нього.

924. Установіть, чи є відрізок CD діаметром кола $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 52$, якщо C (−8; 7), D (4; −1).

925. Коло, центр якого належить осі ординат, проходить через точки A (1; 2) і B (3; 6). Чи належить цьому колу точка C (−3; 4)?

926. Коло з центром у точці M (−5; 3) дотикається до осі ординат. Знайдіть координати точок перетину кола з віссю абсцис.

927. Знайдіть довжину лінії, заданої рівнянням $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

928. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку P (−3; 5) і кутовий коефіцієнт якої дорівнює 6.

929. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку S (−1; 4) і утворює кут 135° з додатним напрямом осі абсцис.

930. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку A (−3; 1) паралельно прямій $5x + 3y - 6 = 0$.

931. Знайдіть рівняння геометричного місця центрів кіл, які проходять через точки A (−3; −2) і B (2; 5).

4. Вектори на площині

932. Дві вершини прямокутника $ABCD$ — точки A (3; 2) і B (3; −4). Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ дорівнює 10. Знайдіть координати точок C і D.

933. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 299). Виразіть вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{CO}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

934. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Знайдіть:

1) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$;

2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$;

3) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}$.

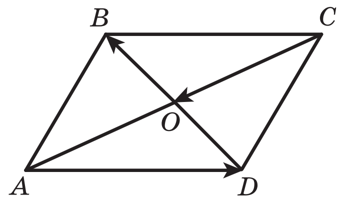


Рис. 299

935. Знайдіть модуль вектора $\vec{n}=3\vec{a}-2\vec{b}$, де $\vec{a}\,(1;-2)$, $\vec{b}\,(-1;3)$.

936. Точки E і F — середини сторін AB і BC паралелограма $ABCD$ відповідно (рис. 300). Виразіть вектор $\overrightarrow{EF}$ через вектори $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$.

937. На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ взято точки M і K відповідно, причому $BM=\frac{1}{4}BC$, $CK=\frac{2}{3}CD$ (рис. 301). Виразіть:

1) вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{AK}$ через вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$;

2) вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{AM}=\vec{m}$ і $\overrightarrow{AK}=\vec{n}$.

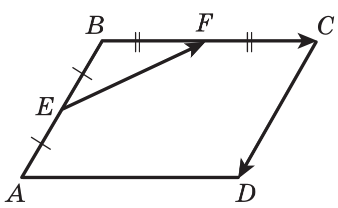


Рис. 300

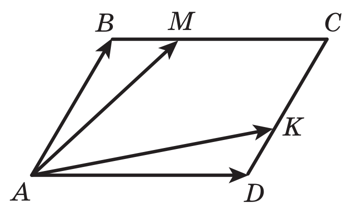


Рис. 301

938. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято такі точки D і E відповідно, що $AD : DC = 1 : 2$, $BE : EC = 2 : 1$. Виразіть:

1) вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ і $\overrightarrow{CD}$ через вектори $\overrightarrow{BE}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$;

2) вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$ через вектори $\overrightarrow{AE}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$.

939. Чи колінеарні вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{KP}$, якщо M (4; −1), N (−6; 5), K (7; −2), P (2; 1)?

940. Знайдіть значення k, при якому вектори $\vec{a}(k; -2)$ і $\vec{b}(6; 3)$ колінеарні.

941. Дано вектори $\vec{a}(3; -2)$ і $\vec{b}(x; 4)$. При якому значенні x виконується рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$?

942. Знайдіть косинуси кутів трикутника ABC, якщо A (−3; −4), B (2; −3), C (3; 5). Установіть вид трикутника.

943. Дано вектори $\vec{a}(2; -1)$ і $\vec{b}(1; -2)$. Знайдіть значення m, при якому вектори $\vec{a} + m\vec{b}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні.

944. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ і $\vec{m} \perp \vec{n}$.

945. Дано вектори $\vec{a}(2; -4)$ і $\vec{b}(-1; 1)$. Знайдіть:

1) $|\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|2\vec{a} + \vec{b}|$.

946. Складіть рівняння прямої, яка дотикається до кола з центром M (0; −4) у точці A (5; −3).

5. Геометричні перетворення

947. При паралельному перенесенні образом точки A (3; −2) є точка B (5; −3). Яка точка є образом точки C (−3; 4) при цьому паралельному перенесенні?

948. Побудуйте образи точок A (1; −3), B (0; −5) і C (2; 1) при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(-2; 1)$. Запишіть координати побудованих точок.

949. Дано точки C (7; −4) і D (−1; 8). При паралельному перенесенні образом середини відрізка CD є точка P (−1; −3). Знайдіть координати точок, які є образами точок C і D.

950. На рисунку 302 $CB = CD$, $\angle ACB = \angle ACD$. Доведіть, що точки B і D симетричні відносно прямої AC.

951. Знайдіть координати точок, симетричних точці K (4; −2) відносно осей координат і початку координат.

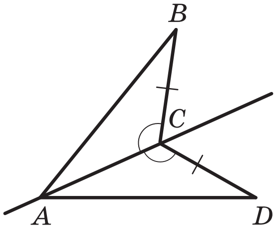


Рис. 302

952. Знайдіть x та y, якщо точки A (x; -2) і B (3; y) симетричні відносно осі абсцис.

953. Дано промінь OA і точку B, що йому не належить. Побудуйте промінь, симетричний даному відносно точки B.

954. Чи симетричні точки M (-3; 10) і N (-1; 6) відносно точки K (1; 4)?

955. Запишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 11$ відносно:

1) початку координат; 2) точки M (-3; 3).

956. Дано точки K і O. Побудуйте точку K_1, яка є образом точки K при повороті відносно точки O: 1) на кут 130° проти годинникової стрілки; 2) на кут 40° за годинниковою стрілкою.

957. Дано відрізок AB і точку O, яка йому не належить. Побудуйте відрізок A_1B_1, який є образом відрізка AB при повороті на кут 50° навколо точки O за годинниковою стрілкою.

958. На який кут треба повернути прямокутник навколо його центра симетрії, щоб його образом був цей самий прямокутник?

959. Побудуйте трикутник, гомотетичний даному тупокутному трикутнику, якщо центром гомотетії є центр описаного кола трикутника, коефіцієнт гомотетії $k = -2$.

960. Образом точки A (8; -2) при гомотетії з центром у початку координат є точка B (4; -1). Знайдіть коефіцієнт гомотетії.

961. Сторони двох правильних трикутників дорівнюють 8 см і 28 см. Чому дорівнює відношення їх площ?

962. Многокутник F_1 подібний многокутнику F_2 з коефіцієнтом подібності k. Буквами P_1, P_2, S_1, S_2 позначено відповідно їх периметри і площі. Заповніть порожні клітинки в таблиці.

P_1	P_2	S_1	S_2	k
	19	64	16	
12	36	7		
	35	4	100	
	21	36		2

963. Пряма, паралельна стороні трикутника завдовжки 6 см, ділить його на дві фігури, площі яких відносяться як 1 : 3. Знайдіть відрізок цієї прямої, що міститься між сторонами трикутника.

964. На стороні BC квадрата $ABCD$ позначено точку M так, що $BM : MC = 1 : 2$. Відрізки AM і BD перетинаються в точці P. Знайдіть площу трикутника APD, якщо площа трикутника BPM дорівнює 27 см^2.

965. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M. Знайдіть площу трапеції, якщо $AB : BM = 5 : 3$, $AD > BC$, а площа трикутника AMD дорівнює 32 см^2.

966. У трикутнику ABC $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. До кола, вписаного у цей трикутник, проведено дотичну, яка паралельна основі AC і перетинає сторони AB і BC у точках M і K відповідно. Обчисліть площу трикутника MBK.

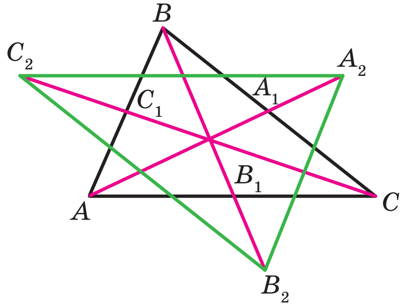


Рис. 303

967. На продовженнях медіан AA_1, BB_1 і CC_1 трикутника ABC позначено відповідно точки A_2, B_2 і C_2 так, що $A_1A_2 = \frac{1}{2}AA_1$, $B_1B_2 = \frac{1}{2}BB_1$, $C_1C_2 = \frac{1}{2}CC_1$ (рис. 303). Знайдіть площу трикутника $A_2B_2C_2$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 1.

6. Початкові відомості зі стереометрії

968. Скільки різних площин можна провести через дві довільні точки?

969. Точка A не належить площині α. Скільки існує прямих, які проходять через точку A і паралельні площині α?

970. Чи є правильним твердження, що коли дві прямі лежать у різних площинах, то вони мимобіжні?

971. Прямі a і b паралельні. Як розташована пряма b відносно площини α, якщо пряма a перетинає площину α?

972. Прямі a і b паралельні площині α. Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

973. Основою прямої призми є паралелограм, сторони якого дорівнюють 3 см і $4\sqrt{2}$ см, а гострий кут — $45°$. Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні та об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 6 см.

974. Основою прямої призми є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 13 см, а один з катетів — 12 см. Знайдіть площу бічної поверхні та об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

975. Знайдіть об'єм трикутної піраміди, основа якої — правильний трикутник зі стороною 8 см, а висота піраміди дорівнює 5 см.

976. Радіус основи циліндра дорівнює 3 см, а його твірна — 6 см. Знайдіть площу поверхні та об'єм циліндра.

977. Прямокутник, сторони якого дорівнюють 6 см і 4 см, обертається навколо більшої сторони. Знайдіть площу поверхні та об'єм утвореного циліндра.

978. Радіус основи конуса дорівнює 8 см, а висота — 15 см. Знайдіть площу поверхні та об'єм конуса.

979. Прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 3 см і 4 см, обертається навколо меншого катета. Знайдіть площу поверхні та об'єм утвореного конуса.

980. Півкруг, діаметр якого дорівнює 6 см, обертається навколо діаметра. Знайдіть площу поверхні та об'єм утвореної кулі.

981. Радіус кулі збільшили у k разів. Як при цьому змінилися площа поверхні та об'єм кулі?

Чотирикутник

1. Паралелограм. Властивості паралелограма

Паралелограмом називають чотирикутник, у якого кожні дві протилежні сторони паралельні.

У паралелограма протилежні сторони рівні і протилежні кути рівні.

Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Висотою паралелограма називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить сторону паралелограма, на пряму, що містить протилежну сторону.

На рисунку 304 кожний з відрізків AF, QE, BM, PN, CK є висотою паралелограма $ABCD$.

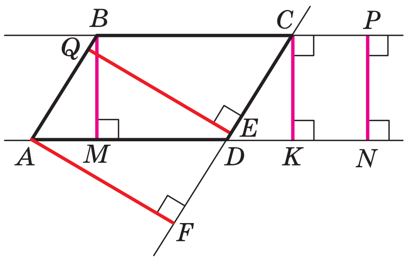


Рис. 304

2. Ознаки паралелограма

Якщо в чотирикутнику кожні дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.

Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні і паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.

Якщо в чотирикутнику діагоналі точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.

3. Прямокутник

Прямокутником називають паралелограм, у якого всі кути прямі.

Діагоналі прямокутника рівні.

Якщо один з кутів паралелограма прямий, то цей паралелограм — прямокутник.

Якщо в паралелограмі діагоналі рівні, то цей паралелограм — прямокутник.

4. Ромб

Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні.

Діагоналі ромба перпендикулярні і є бісектрисами його кутів.

Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні, то цей паралелограм — ромб.

Якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кута, то цей паралелограм — ромб.

5. Квадрат

Квадратом називають прямокутник, у якого всі сторони рівні. Також квадрат — це ромб, у якого всі кути рівні.

6. Середня лінія трикутника

Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох його сторін, паралельна третій стороні і дорівнює її половині.

7. Трапеція

Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

Паралельні сторони трапеції називають основами, а непаралельні — бічними сторонами (рис. 305).

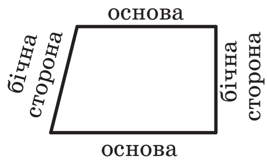


Рис. 305

У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) кути A і D називають кутами при основі AD, а кути B і C — кутами при основі BC.

Висотою трапеції називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить одну з основ, на пряму, яка містить другу основу.

Середньою лінією трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

8. Центральні і вписані кути

Центральним кутом кола називають кут з вершиною в центрі кола.

Вписаним кутом кола називають кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло.

Вписаний кут вимірюється половиною градусної міри дуги, на яку він спирається.

Вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, рівні.

Вписаний кут, який спирається на діаметр (півколо), — прямий.

9. Вписані й описані чотирикутники

Чотирикутник називають вписаним, якщо існує коло, якому належать усі його вершини.

Якщо чотирикутник є вписаним, то сума його протилежних кутів дорівнює 180°.

Якщо в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює 180°, то він є вписаним.

Чотирикутник називають описаним, якщо існує коло, яке дотикається до всіх його сторін.

Якщо чотирикутник є описаним, то суми його протилежних сторін рівні.

Якщо в опуклому чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то цей чотирикутник є описаним.

Подібність трикутників

10. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки

Теорема Фалеса. Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на другій його стороні.

Відношенням двох відрізків називають відношення їх довжин, виражених в одних і тих самих одиницях виміру.

Теорема про пропорційні відрізки. Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута, то відрізки, що утворилися на одній стороні кута, пропорційні відповідним відрізкам, що утворилися на другій стороні кута.

Властивість медіан трикутника. Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини трикутника.

Властивість бісектриси трикутника. Бісектриса трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.

11. Подібність трикутників

Два трикутники називають подібними, якщо у них рівні кути і відповідні сторони пропорційні.

Лема про подібні трикутники. Пряма, яка паралельна стороні трикутника і перетинає дві інші його сторони, відтинає від даного трикутника йому подібний.

Перша ознака подібності трикутників: за двома кутами. Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

Друга ознака подібності трикутників. Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

Третя ознака подібності трикутників. Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

Розв'язування прямокутних трикутників

12. Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику

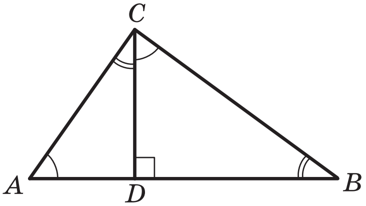


Рис. 306

Квадрат висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проекцій катетів на гіпотенузу. Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи і проекції цього катета на гіпотенузу.

$$CD^2 = AD \cdot DB;$$
$$AC^2 = AB \cdot AD;$$
$$BC^2 = AB \cdot DB.$$

13. Теорема Піфагора

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

14. Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника

Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого.

Синус, косинус і тангенс кута залежать тільки від величини цього кута.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$
$$\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$
$$\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

15. Розв'язування прямокутних трикутників

Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на синус кута, протилежного цьому катету.

Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на косинус кута, прилеглого до цього катета.

Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку другого катета на тангенс кута, протилежного першому катету.

Катет прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення другого катета на тангенс кута, прилеглого до першого катета.

Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на синус протилежного йому кута.

Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на косинус прилеглого до нього кута.

Розв'язати прямокутний трикутник означає знайти його невідомі сторони і кути за відомими сторонами і кутами.

Площа многокутника

16. Площа паралелограма

Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, яка відповідає цій стороні.

17. Площа трикутника

Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на проведену до неї висоту.

Площа прямокутного трикутника дорівнює півдобутку його катетів.

18. Площа трапеції

Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту.

Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії на висоту.

11. 3) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ або $-\frac{\sqrt{13}}{4}$; 4) 0,6. **12.** 1) $\frac{12}{13}$ або $-\frac{12}{13}$; 2) $\frac{\sqrt{35}}{6}$. **15.** $-\frac{1}{2}$. **16.** $120°$. **17.** 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $-2{,}5$; 3) $-\sqrt{3}-2$. **18.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$. **23.** 10 см, $30°$, $120°$. **26.** $5\sqrt{6}$ см. **30.** $120°$. **31.** $45°$. **37.** $2\sqrt{7}$ см. **38.** $\sqrt{10}$ см. **39.** $\sqrt{21}$ см або $\sqrt{29}$ см. **40.** 13 см. **41.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **42.** $3\sqrt{89}$ см. **43.** $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$. **44.** $\sqrt{a^2+b^2-ab}$. **45.** 15 см, 24 см. **46.** 2 см, $4\sqrt{3}$ см. **47.** 3 см, 5 см. **48.** 10 см, 6 см, 14 см. **49.** 6 см або 10 см. **50.** 75 см. **51.** 13 см. **52.** $\sqrt{79}$ см. **56.** 14 см. **57.** 34 см. **58.** 7 см, 9 см. **59.** 20 см, 30 см. **60.** 8 см. *Вказівка*. Проведіть через вершину B пряму, яка паралельна стороні CD, і розгляньте трикутник, який при цьому утворився. **61.** $\frac{13}{20}$. **62.** $\sqrt{\frac{247}{7}}$ см. **63.** Ні. **65.** 10 см. **66.** 6 см. **67.** 11 см. **68.** 6 см. **69.** 22 см. **74.** 4 см, 6 см. **91.** $2\sqrt{6}$ см. **92.** 6 см. **93.** $\frac{a\sin\beta}{\cos(\beta+\gamma)\sin\gamma}$. **94.** $\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **95.** $\frac{c\sin\alpha\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma\sin\varphi}$. **96.** $\frac{m\sin\alpha\sin\varphi}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$. **98.** 9 см. **99.** $\frac{25}{3}$ см. **100.** $60°$ або $120°$. **101.** 4,5 год. **102.** $\frac{b\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}$. **103.** $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45°+\frac{3\alpha}{4}\right)}$. **105.** $\frac{85}{8}$ см. *Вказівка*. Шуканий радіус можна знайти як радіус кола, описаного навколо трикутника, сторонами якого є одна з основ, бічна сторона і діагональ трапеції. **106.** $\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}$. *Вказівка*. Доведіть, що $CE = DE$. **107.** $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. *Вказівка*. На продовженні медіани AM за точку M позначте точку K таку, що $AM = MK$, та застосуйте теорему синусів до трикутника ACK. **108.** $\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$. **109.** *Вказівка*. Виразіть кути AHB, BHC і AHC через кути трикутника ABC. **110.** Швидше доїхати через село C. *Вказівка*. Прийміть відстань між якими-небудь двома селами за a і виразіть через a відстані між іншими селами. **111.** Автобус. **114.** 12 см. **127.** $107°$, $73°$, $132°$, $48°$. *Вказівка*. Проведіть через одну з вершин верхньої основи пряму, паралельну бічній стороні трапеції, і розгляньте трикутник, який при цьому утворився. **128.** 9 см. **129.** 30 см, 48 см. **135.** 1) $60°$ або $120°$; 2) $90°$. **136.** $30°$ або $150°$. **140.** 12 см. **141.** 24 см. **142.** 24 см^2. **143.** $\frac{7}{3}$ см. **144.** 1) $\frac{3}{2}$ см, $\frac{25}{8}$ см; 2) 8 см, $\frac{145}{8}$ см. **145.** 2 см, $\frac{145}{8}$ см. **156.** 3 : 5. **157.** $\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$. **158.** $2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$. **159.** $\frac{b^2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$. **160.** $\frac{h_1h_2}{2\sin\alpha}$. **161.** $\frac{h^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$. **162.** 51 см^2, 75 см^2, 84 см^2. **163.** $\frac{24}{7}$ см. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD}$. **164.** 360 см^2. *Вказівка*. Проведіть через один з кінців верхньої основи трапеції пряму, яка паралельна бічній стороні трапеції, і знайдіть висоту трикутника, який ця пряма відтинає від трапеції. **165.** $12\sqrt{5}$ см^2. *Вказівка*. Нехай $ABCD$ — дана трапеція, $BC \parallel AD$. Проведіть через вершину C пряму, яка паралельна прямій BD і перетинає пряму AD у точці E. Доведіть, що трикутник ACE і дана трапеція рівновеликі. **166.** 1 : 2. *Вказівка*. $\frac{S_{\Delta AMK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AK\cdot AM\sin A}{\frac{1}{2}AC\cdot AB\sin A} = \cos^2 A$. **167.** 19,5 см. **168.** 13 см, 14 см, 15 см. **170.** $10°$. **171.** 91 см, 21 см.

172. 9,6 см. **196.** $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$. **197.** $2\sqrt{R^2-r^2}$. **198.** $\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$.
202. ≈17,4 см. **203.** ≈19,8 см. **204.** 5 сторін. **205.** 18 сторін.
208. 1) $\frac{a(3+\sqrt{3})}{6}$; 2) $\frac{a(3-\sqrt{3})}{6}$. **209.** 1) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.
210. 1 : 2. **211.** $\sqrt{3}$: 2. **214.** 4,4 см. **215.** $2R^2\sqrt{2}$. **216.** $a\sqrt{3}$; $2a$; $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **217.** $6(\sqrt{2}-1)$ см. **218.** 8 см. **219.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $a(\sqrt{2}+1)$; $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **220.** $\frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$. **221.** $\frac{a(2+\sqrt{2})}{2}$.
222. Трикутників, або квадратів, або шестикутників. *Вказівка*. Навколо однієї точки можна укласти стільки дощечок, у скільки разів кут при вершині дощечки, який дорівнює $\frac{180°(n-2)}{n}$, менший від 360°, тобто $360° : \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{2n}{n-2}$ дощечок. Значення виразу $\frac{2n}{n-2}$ має бути натуральним числом. Оскільки $\frac{2n}{n-2} = \frac{2n-4+4}{n-2} = 2+\frac{4}{n-2}$, то значення виразу $\frac{4}{n-2}$ має бути натуральним числом. **223.** *Вказівка*. Нехай $ABCDEF$ — правильний шестикутник (рис. 307), K — точка перетину прямих CD і EF. Тоді AK — шуканий відрізок.
225. 18 см. **226.** 96 см². **227.** 9 см.
252. 22,5°. **257.** $\sqrt{6}$ см. **259.** 1) $\frac{25(\pi-2\sqrt{2})}{8}$ см²; 2) $\frac{25(5\pi-3)}{12}$ см²; 3) $\frac{25(11\pi+3)}{12}$ см². **260.** 1) $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3}$ см²; 2) $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{3}$ см². **265.** 2π см, $\frac{10\pi}{3}$ см, $\frac{20\pi}{3}$ см. **266.** $\frac{25\pi}{18}$ см, $\frac{35\pi}{18}$ см, $\frac{20\pi}{3}$ см.

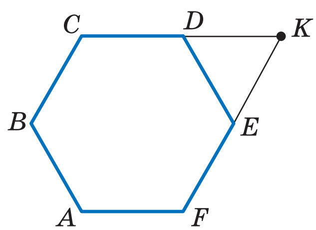


Рис. 307

267. $\frac{8\pi}{3}$ см. **268.** 6π см. **269.** 1 : 1. *Вказівка*. Доведіть, що в обох випадках сума довжин півкіл дорівнює $\frac{1}{2}\pi \cdot AB$.

271. 50 см. **273.** $\frac{a^2(\pi-2)}{8}$. **274.** ≈17,3 %. **275.** $\frac{a^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{36}$.

276. $\frac{\pi R^2}{9}$. **277.** $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **278.** $\frac{2\pi a}{3}$. *Вказівка.* Розгляньте $\Delta\ AND$ і доведіть, що він рівносторонній. **279.** *Вказівка.* Сума площ усіх зафарбованих і незафарбованих серпиків дорівнює сумі площ двох кругів, діаметри яких є сусідніми сторонами прямокутника, а сума площ незафарбованих серпиків і прямокутника дорівнює площі круга, діаметр якого є діагоналлю прямокутника. Покажіть, що ці суми рівні. **280.** *Вказівка.* Спільна частина квадратів містить круг, радіус якого дорівнює $\frac{1}{2}$ см (рис. 308). **282.** $\frac{130}{17}$ см, $\frac{312}{17}$ см. **283.** *Вказівка.* Через середину меншої основи проведіть прямі, паралельні бічним сторонам трапеції. **303.** 1) Так, точка B лежить між точками A і C; 2) ні. **305.** $x = 7$ або $x = -1$. **306.** (3; 0). **307.** (0; 0,5). **308.** (3; −0,5). **309.** (−2; 2). **310.** (3; −2). **314.** A (−5; 3), C (7; 5). **315.** $2\sqrt{73}$. **316.** $\left(3\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$ або $\left(-3\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\right)$. **317.** $\left(-2; 4\sqrt{3}\right)$ або $\left(-2; -4\sqrt{3}\right)$.

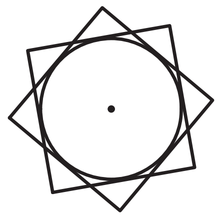


Рис. 308

318. (3; 3) або (−6; 6). *Вказівка.* Розгляньте два випадки: $B\ (a; a)$ або $B\ (a; -a)$. **319.** (5,5; 0), (3; 0), (−1; 0). *Вказівка.* Розгляньте три випадки: $AC = BC$, $AC = AB$ і $BC = AB$. **320.** (0; 6), (0; 4), (0; 3,5), (0; 8,5). *Вказівка.* Розгляньте три випадки: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AC^2 + AB^2 = BC^2$. **321.** $\sqrt{33}$ см. **322.** 56°, 124°. **323.** 8 см і 16 см. **342.** Два кола: $x^2 + (y - 11)^2 = 45$ і $x^2 + (y + 1)^2 = 45$. **343.** $(x - 3)^2 + y^2 = 50$. **345.** 1) Так, точка (−1; 5) — центр кола, $R = 7$; 2) ні; 3) ні; 4) так, точка (2; 7) — центр кола, $R = \sqrt{2}$. **346.** 1) Точка (0; −8) — центр кола, $R = 2$; 2) точка (4; −2) — центр кола, $R = \sqrt{5}$. **347.** $(x - 2)^2 + y^2 = 13$. **348.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ або $(x - 3)^2 + (y - 8)^2 = 25$. **349.** $(x + 5)^2 +$

+ $(y - 2)^2 = 10$ або $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$. **350.** $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ або $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. *Вказівка*. Діаметр шуканого кола дорівнює відстані між віссю абсцис і прямою $y = -4$, а центр кола належить бісектрисі третього або четвертого координатного кута. **351.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ або $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$. **352.** 1) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$; 2) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 169$. **353.** $180\sqrt{3}$ см². **354.** 70 см. **355.** 600 см². **362.** 1) $y = 2x - 5$; 2) $x = 3$; 3) $y = -1$; 4) $5x + 3y = 6$. **363.** 1) $y = -3x + 1$; 2) $x - 6y = 12$. **364.** 1) (–8; –31); 2) (–1; 2). **365.** 1) (2; –7); 2) (4; –1). **366.** $y = -0{,}5x - 4$. **367.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}$. **369.** 12. **370.** 28. **371.** 6. **372.** (2; 5), (5; 2). **373.** (5; 0). **375.** $\frac{10\sqrt{29}}{29}$. *Вказівка*. Шукана відстань дорівнює висоті трикутника, обмеженого осями координат і даною прямою. **376.** $4\sqrt{2}$. **377.** $3\sqrt{10}$. **378.** $x - 3y = 2$. **379.** $7x + 5y = -8$. **380.** (3; 3) або (15; 15). **381.** (–2; 2) або (–10; 10). **382.** $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 17$. **383.** $(y - 4)(y + 4) = 0$. **384.** $\sqrt{10}$ см, $\sqrt{58}$ см. **385.** 104 см. **386.** 12,5 см. **391.** 1) $y = 4x + 19$; 2) $y = -3x - 2$; 4) $y = 7$. **392.** $y = -0{,}5x - 4$. **393.** 1) $y = -7x + 2$; 2) $3x - 4y = -39$. **394.** 1) $y = 9x + 13$; 2) $3x + y = 9$. **395.** 1) $y=x\sqrt{3}+6-2\sqrt{3}$; 2) $y=-x\sqrt{3}+6+2\sqrt{3}$. **396.** 1) $y = x - 5$; 2) $y = -x + 1$. **397.** *а*) $y=\frac{x\sqrt{3}}{3}+3$; *б*) $y=-\frac{x\sqrt{3}}{3}+2$. **398.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. **400.** $y = 4x + 9$. **401.** $y = 3x - 12$. **404.** 30 см, 40 см. **405.** 144 см². **431.** Прямокутник або рівнобічна трапеція. **439.** 60°, 120°. **440.** 4 см, 12 см. **441.** $\frac{a\sqrt{13}}{3}$. *Вказівка*. Проведіть через вершину B пряму, паралельну прямій MK. **457.** $\overrightarrow{AF}(-2;2)$, $\overrightarrow{FD}(2;4)$. **458.** $\overrightarrow{DE}(-4;6)$, $\overrightarrow{EO}(-4;-6)$. **459.** $\vec{a}(-6;-8)$ або $\vec{a}(8;6)$. **460.** $\vec{c}\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ або $\vec{c}\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$. **461.** C (7; 17), D (2; 17) або C (7; –7), D (2; –7). **462.** B (16; 2), C (16; –6) або B (–14; 2), C (–14; –6). **464.** 20 см, 7 см, 21 см.

465. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **511.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **512.** *Вказівка*. Покажіть, що кожний з векторів $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ дорівнює нуль-вектору. **514.** *Вказівка*. Достатньо показати, що $\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{XD}-\overrightarrow{XC}$. **515.** Коло радіуса AB з центром у точці A. **516.** Серединний перпендикуляр відрізка AB. **517.** *Вказівка*. Нехай AA_1 — медіана трикутника ABC. На продовженні відрізка AA_1 за точку A_1 відкладіть відрізок A_1D, рівний MA_1. **518.** *Вказівка*. Маємо: $\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2A_1}=\vec{0}$, $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_2A_2}=\vec{0}$, звідси $\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}$. **519.** 4 см, 6 см. **520.** 2,5 см. **552.** –4; 4. **553.** –1,5. **555.** $(-15;36)$. **556.** $(-3;4)$. **559.** $x=2$, $y=-3$. **560.** $\overrightarrow{OK}=0{,}5\vec{a}-0{,}1\vec{b}$. **564.** $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. **566.** *Вказівка*. $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2M_2}$. З іншого боку, $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2M_2}$. Додайте ці рівності. **572.** *Вказівка*. Нехай відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 — медіани трикутника ABC. Скористайтеся тим, що $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$. **573.** *Вказівка*. Скористайтеся задачею 566 і ключовою задачею 1 п. 15. **574.** *Вказівка*. Виразіть вектори $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{BN}$ через вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$. **575.** 18 см. **576.** 60°; $24\sqrt{3}$ см². **577.** $R\sqrt{3}$. **593.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0. **596.** –3 і 3. **597.** –1. **599.** $\vec{b}(-12;16)$. **600.** –1 і 1. **602.** 4. **603.** –0,5. **604.** $\sqrt{7}$. **605.** $2\sqrt{7}$. **608.** $\frac{3}{5}$, 0, $\frac{4}{5}$. **609.** 30°, 60°, 90°. **612.** 0°. **613.** 120°. **614.** *Вказівка*. Нехай $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Тоді $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AK}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$. Знайдіть $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AK}$. **615.** 45°. *Вказівка*. Нехай $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Очевидно, що $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$. Тоді $\overrightarrow{AO}=2\vec{c}$, $\overrightarrow{DO}=3\vec{b}$. Звідси $\overrightarrow{AB}=2\vec{c}+\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}+3\vec{b}$. **616.** 30°. *Вка-*

зівка. $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$. Звідси $\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cdot\cos\angle ABD$. **617.** *Вказівка*. $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BF}$. Залишилося показати, що $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. **619.** 100 см. **620.** 6π см. **633.** При $AB \parallel a$. **643.** 1) Безліч; 2) безліч. **649.** $(x+3)^2+(y-4)^2=1$. **650.** $y=x^2-4x+1$. **651.** *Вказівка*. Нехай $ABCD$ — шукана трапеція ($BC \parallel AD$). Побудуйте образ діагоналі BD при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{BC}$. **653.** *Вказівка*. Побудуйте образ даної прямої при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AB}$ (або $\overrightarrow{BA}$). Розгляньте точки перетину образу з даним колом. Зауважимо, що коли побудований образ і дане коло не мають спільних точок, то задача не має розв'язку. **655.** *Вказівка*. Нехай $ABCD$ — шуканий чотирикутник з даними сторонами AB і CD (рис. 309). Розглянемо паралельне перенесення сторони AB на вектор $\overrightarrow{BC}$. Трикутник A_1CD можна побудувати за двома сторонами CD і $CA_1 = BA$ і кутом A_1CD, який дорівнює $\angle BCD - (180^\circ - \angle ABC)$. Трикутник AA_1D можна побудувати за стороною A_1D і двома прилеглими кутами AA_1D і ADA_1. **656.** *Вказівка*. Нехай точка A_1 — образ точки A при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{MN}$. З'єднайте точки A_1 і B. **657.** 36 см. **658.** 40. **659.** 490 см². **701.** $a \perp l$ або прямі a і l збігаються. **704.** *Вказівка*. Якщо чотирикутник має вісь симетрії, то образом будь-якої його вершини є вершина цього самого чотирикутника. Оберіть деяку вершину паралелограма і розгляньте дві можливості: її образом є або сусідня вершина, або протилежна. **707.** *Вказівка*. Кути M_1BA і MBA є симетричними відносно прямої AB. Отже, $\angle M_1BA = \angle MBA$. Аналогічно $\angle M_2BC = \angle MBC$. Залишилося показати, що $\angle M_1BM_2 = 180^\circ$. **708.** 1) A_1 (0; −2), B_1 (−1; 3); 2) A_2 (0; 2),

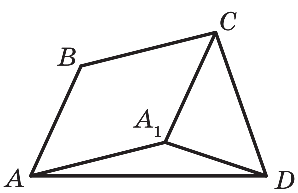


Рис. 309

B_2 **(1; –3). 709.** $x = 2$, $y = -1$. **710.** *Вказівка*. Нехай $\Delta\ ABC$ має центр симетрії. Тоді, наприклад, образом вершини A є вершина B. Отже, центр симетрії — це середина сторони AB. Проте в цьому випадку образ вершини C не належатиме трикутнику ABC. **712.** *Вказівка*. При центральній симетрії образом сторони даного чотирикутника є сторона цього самого чотирикутника. Далі скористайтеся ключовою задачею п. 18. **713.** *Вказівка*. При симетрії відносно точки O образи точок A_1 і B_1 належать колу з центром O_2. Оскільки образом прямої, яка проходить через центр симетрії, є ця сама пряма, то образи точок A_1 і B_1 також належать прямій A_1B_1. Отже, відрізок A_2B_2 — образ відрізка A_1B_1. **714.** 2 см або 1 см. **715.** 2 см. *Вказівка*. При розглядуваному повороті точка B є образом точки D, точка C_1 — образом точки C, точка A — образом точки A (рис. 310). Отже, $\Delta\ ABC_1$ — образ $\Delta\ ADC$. Звідси $\angle ABC_1 = \angle ADC = 90°$. Отже, точки C_1, B, C лежать на одній прямій. **716.** *Вказівка*.

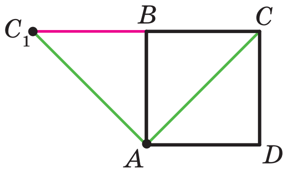


Рис. 310

Нехай точка A_1 — образ точки A при симетрії відносно прямої a. Тоді точка перетину прямих a і A_1B буде шуканою. Зауважимо, що коли точки A і B симетричні відносно прямої a, то задача має безліч розв'язків. **718.** *Вказівка*. Нехай точка A_1 — образ точки A при симетрії відносно прямої a. Тоді точка перетину прямих a і A_1B буде шуканою. **719.** *Вказівка*. Розгляньте центральну симетрію з центром у точці перетину діагоналей паралелограма. **720.** *Вказівка*. Знайдіть середину відрізка AC, а далі скористайтеся прикладом 3 п. 18. **721.** *Вказівка*. Нехай O — дана точка, l_1 і l_2 — дані прямі. Побудуємо образ прямої l_1 при симетрії відносно точки O. Отримаємо пряму l_1' (рис. 311), яка перетинає пряму l_2 у точці E. Знайдемо прообраз точки E при розглядуваній симетрії. Очевид-

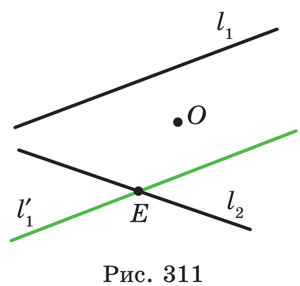


Рис. 311

но, що він має належати прямій l_1. Отже, точка, симетрична точці E відносно точки O, також належить прямій l_1. **722.** *Вказівка.* Скористайтеся ідеєю розв'язування прикладу 5 п. 18. **723.** *Вказівка.* Розглянемо поворот з центром у точці C проти годинникової стрілки на кут $60°$. При такому повороті образами точок E і B будуть відповідно точки D і A. Отже, відрізок AD і його середина K будуть відповідно образами відрізка BE і його середини M. **724.** *Вказівка.* Нехай l_1, l_2, l_3 — дані паралельні прямі, O — довільна точка прямої l_2 (рис. 312). Пряма l_1' — образ прямої l_1 при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут $60°$ — перетинає пряму l_3 у точці M. Знайдемо прообраз точки M при заданому повороті. Очевидно, що він належить прямій l_1. Тому достатньо відкласти від променя OM кут, рівний $60°$. **725.** *Вказівка.* Нехай трикутник A_1BC — образ трикутника ABC при симетрії відносно серединного перпендикуляра відрізка BC (рис. 313). Трикутник ACA_1 можна побудувати за відомими сторонами AC і A_1C ($A_1C = AB$) і кутом ACA_1, який дорівнює різниці кутів B і C. **726.** *Вказівка.* Нехай точка C_1 симетрична точці C відносно прямої AB. Побудуйте коло з центром у точці C_1, яке дотикається до прямої AB. Проведіть через точку D дотичну до побудованого кола. Ця дотична перетинає пряму AB у шуканій точці. **727.** *Вказівка.* Нехай O — дана точка, l_1, l_2 і l_3 — дані прямі. Побудуйте відрізок AC, серединою якого є точка O, а кінці належать прямим l_1 і l_2. Цей відрізок є однією з діагоналей ромба. Знайдіть точку перетину прямої l_3 із серединним перпендикуляром відрізка AC. **728.** *Вказівка.* Розглянемо поворот з центром у точці A проти годинникової стрілки

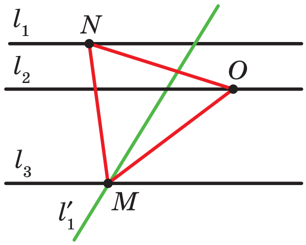


Рис. 312

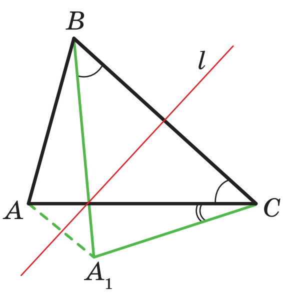


Рис. 313

вої стрілки на кут 90°. При цьому повороті образом відрізка AD буде відрізок AB (рис. 314). Нехай E_1 — образ точки E. Тоді трикутник ABE_1 — образ трикутника ADE. Звідси $\Delta ABE_1 = \Delta ADE$. Тоді $DE = BE_1$, $AE = AE_1$, $\angle E_1AB = \angle EAD$. Маємо: $\angle E_1AF = \angle E_1AB + \angle BAF = \angle EAD + \angle FAE = \angle FAD$. Але $\angle FAD = \angle E_1FA$. Отже, ΔAE_1F — рівнобедрений і $AE_1 = E_1F$. **729.** *Вказівка.* Розглянемо поворот з центром у точці A за годинниковою стрілкою на кут 60° (рис. 315). При цьому повороті образом трикутника ABP буде трикутник ACP_1 (точка P_1 — образ точки P). Звідси $\angle AP_1C = \angle APB = 150^\circ$. Трикутник APP_1 — рівносторонній. Тоді $\angle AP_1P = 60^\circ$. Отже, $\angle PP_1C = 90^\circ$. Залишилося зауважити, що $P_1C = PB$ і $PP_1 = AP$. **732.** $\frac{120}{7}$ см. **752.** 1) 1,5; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$. **756.** $\frac{1}{3}$. **757.** 12 см. **758.** 28,8 см². **760.** $\frac{S}{16}$. **761.** 1) $k = 2$, точка B або $k = -2$, точка перетину діагоналей трапеції $AMNC$. **766.** *Вказівка.* Нехай дане коло дотикається до прямої a в точці M. Точка M_1 — образ точки M при гомотетії з центром A. Оскільки образом прямої a є ця сама пряма, то точка M_1 належить прямій a. Покажіть, що образ даного кола і пряма a мають тільки одну спільну точку M_1. **767.** $-\frac{1}{2}$. *Вказівка.* За означенням гомотетії $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$. **768.** $(-3; 2)$. **769.** 1) $x = -3$, $y = 8$; 2) $x = 12$, $y = -2$. **770.** $x = 0$, $y = 8$.

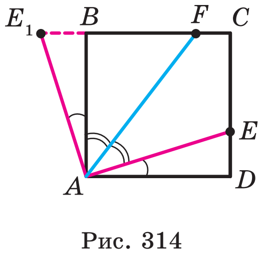


Рис. 314

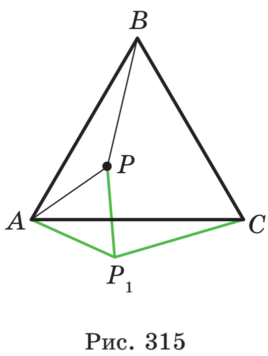


Рис. 315

771. 28 см². **772.** 20 см². **773.** 112 см². **775.** 1) $y = 2x + 2$; 2) $y = 2x - \frac{1}{2}$. *Вказівка*. Оберіть довільну точку M, яка належить даній прямій. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{OM_1} = 2\overrightarrow{OM}$. Точка M_1 — образ точки M при даній гомотетії. Скористайтеся тим, що кутовий коефіцієнт шуканої прямої дорівнює 2. **776.** 1) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$; 2) $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 16$. **777.** *Вказівка*. Пряма A_2B_2 є образом прямої A_1B_1 при гомотетії з центром у точці дотику і коефіцієнтом, рівним відношенню більшого радіуса до меншого. **779.** Коло, за винятком точки A, яке є образом даного кола при гомотетії з центром A і коефіцієнтом, рівним $\frac{1}{2}$. **781.** *Вказівка*. Трикутник з вершинами в отриманих точках є образом трикутника з вершинами в серединах сторін даного трикутника при гомотетії з центром M і коефіцієнтом, рівним 2. **782.** *Вказівка*. Побудуйте довільний трикутник, два кути якого дорівнюють двом даним кутам. Опишіть навколо нього коло. Шуканий трикутник є образом побудованого трикутника при гомотетії з центром у довільній точці і коефіцієнтом, рівним відношенню даного радіуса до радіуса побудованого кола. **784.** *Вказівка*. Див. розв'язання прикладу 1 п. 19. **785.** *Вказівка*. Розгляньте гомотетію з центром у середині відрізка AB і коефіцієнтом, рівним $\frac{1}{3}$. **786.** Пряма, яка є образом прямої l при гомотетії з центром у середині відрізка AB і коефіцієнтом, рівним $\frac{1}{3}$, за винятком точки перетину прямих AB і l (якщо така точка існує). **787.** *Вказівка*. Побудуйте довільне коло, яке дотикається до сторін кута (рис. 316). Нехай M_1 — одна з точок перетину прямої BM з побудованим колом. Розгляньте гомотетію з

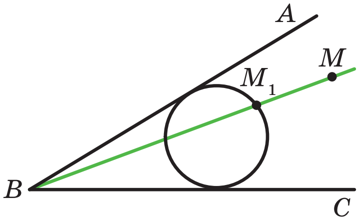


Рис. 316

центром у точці B і коефіцієнтом, рівним $\frac{BM}{BM_1}$. Задача має два розв'язки. **788.** 96 см², 4,8 см. **789.** 24. **795.** Точки лежать на одній прямій. **804.** Площини можуть перетинатися або бути паралельними. **808.** Перетинаються або мимобіжні. **813.** $15\sqrt{2}$ см. **814.** $15\sqrt{3}$ см. **815.** 15 см. **816.** 20 см. **817.** $2\sqrt{21}$ см. **818.** $2\sqrt{12+3\sqrt{6}}$ см. **819.** 90°. **820.** $3\sqrt{10}$ см. **821.** 13. **838.** 680 см², 840 см², 1360 см³. **839.** 350 см², 420 см³. **840.** $3d^2$, $\frac{\sqrt{2}}{4}d^3$. **845.** $48\sqrt{2}$ см². **846.** 36 см². **850.** $\frac{1}{2}d^3\sin\alpha\sin\beta\cos^2\beta$. **851.** m^2 tg β (sin α + cos α); m^3 sin α cos α tg β. **852.** $8a^2\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$; $2a^3\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **853.** $\frac{a^3}{6}$. **854.** CD; 7 см, 10 см.**856.** $y = 0{,}5x - 0{,}5$. **867.** ≈ 1,24 мм. **868.** ≈ 60 000 Н. **869.** 200π см²; 320π см³. **870.** 320π см²; 1024π см³. **871.** ≈ 3770 кг. **872.** 4,5 см. **873.** ≈ 550 кг. **876.** ≈ 3 кг. **877.** $\pi h^2\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}\pi h^3$. **878.** $2\pi R^2$; $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$. **880.** 25 см або 39 см. *Вказівка.* Знайдіть синус кута між даними сторонами, а потім — його косинус. **881.** $(x - 4)^2 + y^2 = 25$ або $(x + 2)^2 + y^2 = 25$. **882.** $2\sqrt{17}$ см або $2\sqrt{41}$ см. **883.** $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-2}{2\sqrt{21}}$. **885.** 9 см, 24 см. **886.** 1 см або 2 см. **887.** 36 см. **888.** $\sqrt{4a^2+d^2}$. **889.** 4 см. *Вказівка.* Оскільки трапеція $ABCK$ є вписаною, то $AB = CK$. Тоді $\angle KAC = \angle AKB, AC = BK$. **890.** $\frac{9}{16}$; $-\frac{9}{16}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}$. **891.** $\sqrt{111}$ см. **892.** 9,5 см. **893.** 12 см. **894.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **895.** $1:1:\sqrt{3}$. **896.** 6 см.

897. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см. **898.** $\frac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}$. *Вказівка*. Скористайтеся формулою для обчислення площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними. **899.** $4\sqrt{3}$ см^2. **900.** 3 см, $\frac{3}{4}$ см, $\frac{65}{4}$ см. **901.** 15 см. **902.** 132 см^2. **903.** 450 см^2. **904.** 36 см^2. **906.** $6\sqrt{3}$ см^2. **907.** 1 : 2. **908.** $2a\left(2-\sqrt{3}\right)$. **909.** 45 см. **910.** $\frac{32\pi}{15}$ см. **912.** $\frac{R^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{6}$; $\frac{4}{3}\pi R$. **913.** 54°. **915.** $3m$. **916.** $\frac{R^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{3}$. **918.** (–9; 0). **919.** (0; –2,5). **923.** $(x-7)^2+(y+0{,}5)^2=6{,}25$. **924.** Так. **925.** Так. **926.** (–1; 0), (–9; 0). **927.** 10π. **928.** $y=6x+23$. **929.** $y=-x+3$. **930.** $y=-\frac{5}{3}x-4$. **943.** $-\frac{4}{5}$. **944.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **946.** $5x+y-22=0$. **963.** 3 см або $3\sqrt{3}$ см. **964.** 3 см^2. **965.** 27,5 см^2. **966.** $\frac{320}{27}$ см^2. **967.** $\frac{25}{16}$. *Вказівка*. Трикутник $A_2B_2C_2$ є образом трикутника ABC при гомотетії з коефіцієнтом, рівним $-\frac{5}{4}$, і центром у точці перетину медіан трикутника ABC.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ У ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

Номер завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Г	В	А	Б	А	Г	А	В	Б	Б	Г	Б
2	В	Б	Б	А	Г	Г	А	В	Г	В	Б	А
3	Б	Б	А	В	Б	Г	В	Г	Б	В	Б	А
4	В	Г	А	В	А	А	Б	Г	В	А	Г	В
5	Б	А	Г	В	В	Б	Г	А	В	В	А	Г
6	В	Г	Б	В	А	Г	Б	Б	Г	А	Г	А

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ДОДАТОК

Таблиця значень тригонометричних функцій

Величина кута (у градусах)	Синус	Косинус	Тангенс	Величина кута (у градусах)	Синус	Косинус	Тангенс
0	0,000	1,000	0,000	46	0,719	0,695	1,036
1	0,017	1,000	0,017	47	0,731	0,682	1,072
2	0,035	0,999	0,035	48	0,743	0,669	1,111
3	0,052	0,999	0,052	49	0,755	0,656	1,150
4	0,070	0,998	0,070	50	0,766	0,643	1,192
5	0,087	0,996	0,087	51	0,777	0,629	1,235
6	0,105	0,995	0,105	52	0,788	0,616	1,280
7	0,122	0,993	0,123	53	0,799	0,602	1,327
8	0,139	0,990	0,141	54	0,809	0,588	1,376
9	0,156	0,988	0,158	55	0,819	0,574	1,428
10	0,174	0,985	0,176	56	0,829	0,559	1,483
11	0,191	0,982	0,194	57	0,839	0,545	1,540
12	0,208	0,978	0,213	58	0,848	0,530	1,600
13	0,225	0,974	0,231	59	0,857	0,515	1,664
14	0,242	0,970	0,249	60	0,866	0,500	1,732
15	0,259	0,966	0,268	61	0,875	0,485	1,804
16	0,276	0,961	0,287	62	0,883	0,469	1,881
17	0,292	0,956	0,306	63	0,891	0,454	1,963
18	0,309	0,951	0,335	64	0,899	0,438	2,050
19	0,326	0,946	0,344	65	0,906	0,423	2,145
20	0,342	0,940	0,364	66	0,914	0,407	2,246
21	0,358	0,934	0,384	67	0,921	0,391	2,356
22	0,375	0,927	0,404	68	0,927	0,375	2,475
23	0,391	0,921	0,424	69	0,934	0,358	2,605
24	0,407	0,914	0,445	70	0,940	0,342	2,747
25	0,423	0,906	0,466	71	0,946	0,326	2,904
26	0,438	0,899	0,488	72	0,951	0,309	3,078
27	0,454	0,891	0,510	73	0,956	0,292	3,271
28	0,469	0,883	0,532	74	0,961	0,276	3,487
29	0,485	0,875	0,554	75	0,966	0,259	3,732
30	0,500	0,866	0,577	76	0,970	0,242	4,011
31	0,515	0,857	0,601	77	0,974	0,225	4,331
32	0,530	0,848	0,625	78	0,978	0,208	4,705
33	0,545	0,839	0,649	79	0,982	0,191	5,145
34	0,559	0,829	0,675	80	0,985	0,174	5,671
35	0,574	0,819	0,700	81	0,988	0,156	6,314
36	0,588	0,809	0,727	82	0,990	0,139	7,115
37	0,602	0,799	0,754	83	0,993	0,122	8,144
38	0,616	0,788	0,781	84	0,995	0,105	9,514
39	0,629	0,777	0,810	85	0,996	0,087	11,430
40	0,643	0,766	0,839	86	0,998	0,070	14,301
41	0,656	0,755	0,869	87	0,999	0,052	19,081
42	0,669	0,743	0,900	88	0,999	0,035	28,636
43	0,682	0,731	0,933	89	1,000	0,017	57,290
44	0,695	0,719	0,966	90	1,000	0,000	
45	0,707	0,707	1,000				

ЗМІСТ

Видано за рахунок державних коштів
Продаж заборонено

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Редактор *Г. Ф. Висоцька*
Художник *С. Е. Кулинич*
Комп'ютерна верстка *О. О. Удалов*
Коректор *Т. Є. Цента*

Підписано до друку 25.05.2009. Формат 60×90/16. Гарнітура шкільна.
Папір офсетний. Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 17,00.
Обл.-вид. арк. 13,08. Тираж 118 546 прим. Замовлення № 354.

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-83-93, 719-17-26

Віддруковано з готових діапозитивів
у друкарні ПП «Модем»
Тел. (057) 758-15-80

Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.
М52 Геометрія: Підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. — Х.: Гімназія, 2009. — 272 с.: ил.
ISBN 978-966-474-046-0.

УДК 373:512
ББК 22.151я721